

ЛЕКЦИИ
по дисциплине
«МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА»
Часть 1

Направления подготовки бакалавров:
«Двигатели летательных аппаратов»
«Техносферная безопасность»

Лектор
доктор технических наук, профессор
Зуев Юрий Владимирович

ПРЕДМЕТ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

В механике существует понятие сплошной среды. В случае сплошной среды вещество, физические характеристики его состояния и движения распределены в пространстве непрерывно.

Раздел теоретической механики, занимающийся изучением движения сплошных деформируемых сред, называется механикой сплошной среды. Часть механики сплошной среды, относящаяся к жидким и газообразным средам, носит название механики жидкости и газа.

В механике жидкости и газа для капельных жидкостей и газов обычно пользуются одним термином "жидкость" (несжимаемая и сжимаемая).

Несжимаемой жидкостью называется капельная жидкость или газ, зависимостью плотности которых от давления в рассматриваемой задаче можно пренебречь.

Сжимаемой жидкостью называется газ, зависимостью плотности которого от давления в рассматриваемой задаче пренебречь нельзя.

Законы движения несжимаемой жидкости изучает *гидродинамика*. При движении несжимаемой жидкости рассматриваемый объем может деформироваться, но не может изменять своей величины (отсутствуют процессы сжатия или расширения).

Законы движения газов при существенном изменении их плотности изучает *газовая динамика*. Изменение плотности газов наблюдается при их движении с большими скоростями (превышающими 30÷40% скорости распространения звука) или при подводе (отводе) к газу тепла и механической работы. Поэтому можно дать следующее определение *газовой динамики*: это наука о законах движения газа с большими скоростями, а при энергетическом обмене с внешней средой – как при движении с большими, так и с малыми скоростями.

Все законы и уравнения газовой динамики справедливы и для несжимаемой жидкости. В связи с этим в дальнейшем, если излагаемый материал применим как для газов, так и для капельных жидкостей, будет использоваться термин "жидкость". При необходимости будет даваться уточнение, является среда сжимаемой или несжимаемой жидкостью.

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Дано: 1. Область течения жидкости и ее свойства.

2. Твердые тела, обтекаемые жидкостью, или канал, по которому она течет, и энергетическое воздействие на жидкость.

3. Начальные условия (значения параметров во всей области течения в начальный момент времени t_0) и граничные условия (значение параметров жидкости на границе области в произвольные моменты времени).

Определить: пространственно-временные поля всех параметров текущей жидкости, т. е. скорости, плотности, давления и температуры в произвольных точках пространства в текущий момент времени:

$$u = u(x, y, z, t); v = v(x, y, z, t); w = w(x, y, z, t); \rho = \rho(x, y, z, t); p = p(x, y, z, t); T = T(x, y, z, t),$$

где u, v, w - проекции вектора скорости жидкости \vec{W} на оси x, y, z произвольно выбранной системы координат; ρ, p, T - плотность, давление и температура жидкости.

Решение поставленной задачи позволяет определить силовое и тепловое взаимодействие между потоком жидкости и твердыми телами, рассчитать и спроектировать работоспособную конструкцию двигателя, агрегата или летательного аппарата.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ

Аналитический метод, заключающийся в решении математической модели.

Метод научного эксперимента, заключающийся в проведении физического эксперимента на натурном или модельном объекте с обобщением полученных результатов, при проведении которого используется математическая модель течения и теория подобия.

Математическая модель представляет собой замкнутую систему дифференциальных или алгебраических уравнений, при написании которых, как правило, учитываются только существенные детали течения, а несущественные (второстепенные) исключаются из рассмотрения. При этом анализируются не сами течения, а их математические модели, с определенной степенью точности отражающие процессы, протекающие в этих реальных течениях. Каждая модель позволяет решать ограниченный круг задач с точностью, зависящей от количества факторов, учтенных при построении математической модели.

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Совершенный газ

В МЖГ вместо реального газа используется его модель - совершенный газ. Совершенный газ – газ, в котором отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия. Его молекулы представляются в виде материальных точек, взаимодействующих только при соударениях. Совершенный газ имеет постоянные теплоемкости c_p и c_v , показатель изэнтропы $k = c_p/c_v$, молекулярную массу m и удовлетворяет уравнению состояния (уравнению Менделеева-Клапейрона), являющимся одним из важных уравнений газовой динамики:

$$p = \rho RT,$$

в котором $R = c_p - c_v$ - удельная газовая постоянная данного газа, имеющая размерность Дж/(кг·К). Эта газовая постоянная может быть определена следующим образом: $R = R_0/m$ [$R_0 = 8314$ Дж/(кмоль·К) - универсальная газовая постоянная; m - масса моля газа, кг/кмоль].

Использование модели "совершенный газ" обеспечивает достаточную для практики точность расчетов, если температура воздуха не превышает примерно 2500К. При больших температурах эта модель позволяет выяснить лишь механические особенности этих сложных течений.

Сплошность жидкости. Постулат Даламбера-Эйлера.

В МЖГ не рассматривается молекулярное строение жидкостей, а в соответствии с постулатом Даламбера-Эйлера жидкость считается сплошной средой.

Постулат Даламбера-Эйлера утверждает, что при изучении направленного движения жидкостей и сил взаимодействия их с твердыми телами, жидкости можно рассматривать как сплошную среду (континуум), лишенную молекул и межмолекулярных пространств.

Реально существующее хаотическое движение молекул отражается в этом случае в величине макроскопических параметров движущейся жидкости - ρ , p , T , W , которые для континуума являются функциями точек пространства. Это дает возможность применения для анализа движения жидкостей математического аппарата дифференциального исчисления, хорошо разработанного для непрерывных функций. Все законы газовой динамики справедливы до тех пор, пока справедлив постулат о сплошности жидкости. Количественно пределы применения законов газовой динамики сплошной среды определяются величиной критерия Кнудсена, равного отношению длины свободного пробега молекул газа l к характерному размеру течения L :

$$\text{Kn} = \frac{l}{L}$$

При $\text{Kn} < 0,01$ - течения континуума.

Жидкая частица

Жидкая частица – мысленно выделенная весьма малая масса δm неизменного состава по объему, заключенная в физически малом объеме δV , удовлетворяющем следующим условиям:

1. характерный размер δV должен быть малым по сравнению с характерными размерами течения (канала или обтекаемых тел) так, чтобы этот объем можно было считать "точкой";

2. объем δV должен содержать достаточное количество молекул, чтобы изменение их количества в этом объеме не вызывало изменения макроскопических параметров жидкости, что выполняется для объема, размеры которого значительно превышают межмолекулярные расстояния.

При движении жидкая частица может изменять объем и форму, но заключенная в ней масса жидкости остается постоянной.

Жидкий объем

Жидкий объем – мысленно выделенный объем, состоящий из одних и тех же жидких частиц. При движении может деформироваться, но сохраняет постоянную массу.

Контрольный объем

Контрольный объем – мысленно выделяемый постоянный объем, занимающий неизменное положение в пространстве. Через этот объем протекает жидкость.

Контрольная поверхность

Контрольная поверхность – поверхность, ограничивающая контрольный объем (для жидкого объема – поверхность жидкого объема).

Гидрогазодинамическая система и внешняя (окружающая) среда

Гидрогазодинамическая система – совокупность материальных тел со связями между ними, заключенных внутри контрольной поверхности.

Жидкости и твердые тела, находящиеся вне контрольного объема (газодинамической системы) называются *внешней* или *окружающей средой*.

Система, не обменивающаяся с окружающей средой ни энергией, ни веществом, называется *изолированной* или *замкнутой*. Если система имеет такой обмен, то она называется *открытой*.

Система, не обменивающаяся с окружающей средой веществом, но обменивающаяся энергией, называется *закрытой*.

Система, не обменивающаяся с окружающей средой энергией, называется *энергетически изолированной*.

Поведение системы характеризуется ее состоянием и взаимодействием с окружающей средой.

Параметры состояния – величины, характеризующие состояние жидкости в системе: давление p , температура T , плотность ρ (удельный объем $v = 1/\rho$), скорость \vec{W} .

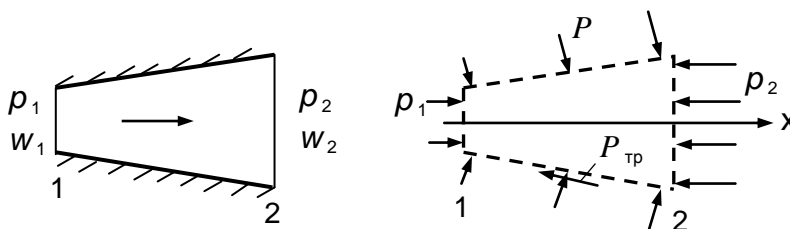
Если в системе все параметры постоянны по времени и нет никаких стационарных потоков за счет действия каких-либо внешних источников, то такое состояние системы называется *равновесным*.

Если некоторые параметры системы изменяются по времени, то в такой системе происходит *процесс*.

Процесс называется равновесным, если все параметры системы изменяются физически бесконечно медленно, так что система все время находится в равновесных состояниях.

Методика исследования движения континуума

1. Выделяется газодинамическая система.
2. Выбирается система координат (декартова, цилиндрическая, сферическая), при использовании которой уравнения математической модели имеют наиболее простой вид.
3. Окружающая среда мысленно отбрасывается и ее действие на систему заменяется соответствующими силами, которые при этом становятся внешними по отношению к системе.
4. Для выбранной системы записываются уравнения неразрывности и количества движения.
5. Одновременно изучается обмен энергией между системой и окружающей средой – составляется уравнение энергии.
6. Параметры газа связываются между собой уравнением состояния.
7. Задаются начальные и граничные условия.
8. Полученная система уравнений решается с учетом начальных и граничных условий.
9. Проводится анализ полученных результатов.



Силы и напряжения, действующие на жидкий объем

Все внешние силы, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, разделяются на *массовые (объемные)* и *поверхностные*.

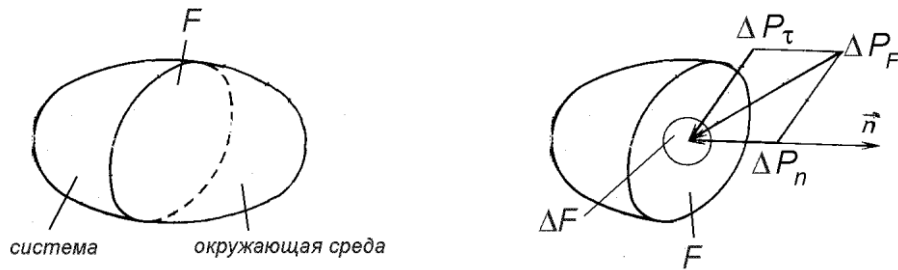
Массовые силы P_m приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и инерции.

Напряжением массовой силы \vec{J} (м/с², Н/кг) называется предел отношения вектора массовой силы $\Delta \vec{P}_m$ к массе Δm жидкой частицы, на которую она действует:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_m}{\Delta m}$$

Поверхностные силы P_F представляют воздействие внешней среды на поверхность выделенного объема. Это воздействие распределено по поверхности непрерывно.

Рассмотрим некоторый объем жидкости.



Разделим этот объем на две части и будем считать, что одна из его частей является системой, а вторая – окружающей средой. Воздействие окружающей среды на систему заменим соответствующими силами, распределенными по поверхности F . На элементарную площадку ΔF действует сила ΔP_F , которую можно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие: ΔP_n и ΔP_τ .

Напряжения поверхностных сил – это пределы отношений соответствующих сил к площадке ΔF при стягивании ее в точку. Различают:

- напряжение равнодействующей поверхностной силы

$$r = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P_F}{\Delta F}$$

- нормальное напряжение (силы давления)

$$\sigma = - \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta F}$$

Знак минус связан с тем, что силы, действующие на систему со стороны окружающей среды, направлены во внутрь контрольного объема, а за положительное направление нормальной составляющей поверхностной силы принимается направление внешней нормали к поверхности.

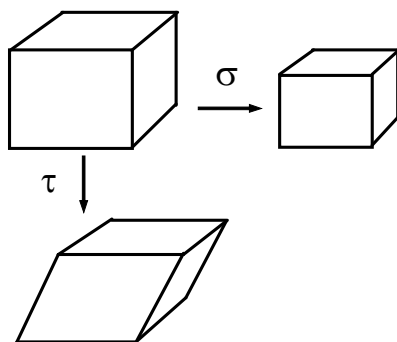
- касательное напряжение или напряжение трения

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P_\tau}{\Delta F}$$

Деформации

Напряжения, действующие в жидкости, вызывают ее деформацию.

Различают объемную деформацию, связанную с изменением объема и сдвиговую деформацию, связанную с изменением формы.



Гипотеза прилипания

При обтекании тел вязкой жидкостью молекулы жидкости, находящиеся вблизи обтекаемой поверхности, движутся со скоростью этой поверхности ("прилипают" к ней).

Физические свойства жидкостей

Физические свойства жидкостей определяются их молекулярным строением. В отличие от твердых тел жидкости обладают свойствами легкоподвижности или текучести, вязкостью и сжимаемостью.

Легкоподвижность или текучесть жидкостей

Легкоподвижность или текучесть – свойство жидкостей, заключающееся в малой сопротивляемости жидкости деформации сдвига.

Из-за текучести жидкостей к ним не могут быть приложены сосредоточенные силы. В жидкостях действуют напряжения – силы, непрерывно распределенные по объему или поверхности.

Вязкость или внутреннее трение в жидкостях

Вязкостью называется свойство всех реальных жидкостей оказывать сопротивление относительному сдвигу частиц, т. е. изменению их формы (но не объема).

В соответствии с *законом Ньютона о молекулярном трении в жидкостях* напряжение трения в жидкости пропорционально градиенту скорости, приводящему к деформации жидкого объема:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Коэффициент пропорциональности μ называется динамическим коэффициентом вязкости и измеряется в Н·с/м² (Па·с). В общем случае $\mu = \mu(p, T)$ и зависит от природы жидкости, ее агрегатного состояния. Для газов с увеличением температуры μ увеличивается, а для капельных жидкостей - уменьшается.

Наряду с динамическим коэффициентом вязкости используется кинематический коэффициент вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [\text{м}^2/\text{с}]$$

Гидростатическое давление

При отсутствии касательных напряжений в жидкости (в случае покоя, отсутствия градиента скорости) на поверхность жидкого объема будут действовать только нормальные напряжения, не зависящие от ориентации площадки поверхности и равные гидростатическому (статическому) давлению с противоположным знаком:

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

σ_x , σ_y , σ_z – нормальные напряжения, действующие на грани жидкого объема, перпендикулярные осям x , y , z .

Идеальная жидкость

Под идеальной жидкостью понимается жидкость, в которой отсутствует вязкость, т.е. $\mu = 0$.

В реальной жидкости вязкость не проявляется, если она покоится или движется с равномерным полем скоростей, когда $du/dy = 0$.

Сжимаемость жидкости

Сжимаемость – свойство жидкостей изменять плотность (объем) при изменении давления и температуры. Количественно сжимаемость оценивается модулем упругости жидкостей

$$z = \frac{\Delta p}{\Delta \rho / \rho}$$

Для воды $z = 2 \cdot 10^9$ Па. Для газов сжимаемость зависит от процесса; например, для изоэнтروпийного процесса $z = k \cdot p$, для изотермического – $z = p$.

Для количественной оценки сжимаемости жидкости при изменении только температуры при $p = \text{const}$ используется коэффициент температурного расширения

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

В газовой динамике для оценки сжимаемости газа используется число Маха – отношение скорости газа W к скорости звука a

$$M = \frac{W}{a}$$

$a = \sqrt{kRT}$; k – показатель изоэнтропы газа, $k = c_p/c_v$; R – газовая постоянная данного газа, $R = c_p - c_v$.

Газ можно считать несжимаемым при $M \leq 0,3 \div 0,4$. В этом случае для расчета газовых течений можно использовать математические модели несжимаемой жидкости.

Несжимаемая жидкость

Несжимаемая жидкость — жидкость, плотность которой при изменении давления и температуры не изменяется ($\rho = \text{const}$). Модель несжимаемой жидкости используется для упрощения исследования течений, когда относительное изменение плотности жидкости весьма мало. В природе нет несжимаемых жидкостей, но многие капельные жидкости можно считать несжимаемыми.

Режимы течения жидкостей

В зависимости от механизма переноса массы, количества движения и энергии в потоке жидкости различают два режима ее течения: ламинарный и турбулентный. При определенных условиях возможен переход ламинарного режима течения в турбулентный. Этот переход происходит не сразу, а на некотором участке течения, который называют переходным. Течение в пределах этого участка сочетает в себе особенности и ламинарного и турбулентного режимов течения. Часто принимают, что переход ламинарного течения в турбулентное происходит в некотором переходном сечении.

Возможность существования ламинарного или турбулентного режима течения определяется значением безразмерного комплекса, называемого критерием или числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho W l}{\mu}$$

в котором: W , ρ и μ - скорость, плотность и коэффициент динамической вязкости жидкости, l - характерный размер течения.

Значение числа Рейнольдса, при котором происходит переход ламинарного течения в турбулентное, называется критическим. При течении жидкости в трубе за характерный размер принимается диаметр трубы, а критическое число Рейнольдса равно 2300 ($Re_{кр}=2300$). Т.е. принимается, что если $Re < Re_{кр}$, то течение ламинарное, а если $Re > Re_{кр}$, то течение турбулентное.

Ламинарное течение - упорядоченное слоистое течение, в котором обмен массой, количеством движения и энергией между соседними слоями жидкости осуществляется за счет молекулярного переноса - перемещения отдельных молекул жидкости из слоя в слой.

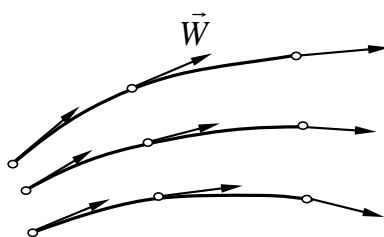
Турбулентное течение - хаотическое неупорядоченное и, следовательно, не стационарное течение, в котором обмен массой, количеством движения и энергией между

рядом расположенными слоями жидкости происходит не только за счет молекулярного переноса, но главным образом за счет перемещения из слоя в слой целых объемов жидкости.

Турбулентное течение можно представить, как течение, в котором на главное слоистое движение жидкости накладывается хаотическое перемещение вдоль и поперек главного направления движения жидкости постоянно образующихся и исчезающих вихрей различного размера. При этом под "вихрями" следует понимать жидкие объемы вихревого происхождения. В турбулентном потоке сначала образуются вихри, размер которых соизмерим с размерами потока, например, радиусом трубы, струи и т.п. В процессе своего движения эти вихри распадаются на более мелкие, при распаде которых образуются еще более мелкие вихри и т.д. В крупных вихрях инерционные явления преобладают над вязкими. Такие вихри определяют процессы переноса массы, количества движения и тепла, но в малой степени подвержены действию вязкости. Непрерывное уменьшение размера вихрей в конечном итоге приводит к появлению мелких вихрей, внутри которых вязкие силы преобладают над силами инерции. В мелких вихрях вязкие силы совершают работу трения, которая преобразуется в тепло, идущее на нагрев жидкости. Как говорят, происходит диссипация энергии, переход кинетической энергии в тепло. При этом полная механическая энергия жидкости, которая может быть затрачена на совершение полезной работы, уменьшается.

Линия тока

Это линия в пространстве, в каждой точке которой, в данный момент времени, вектора скорости частиц касательны.

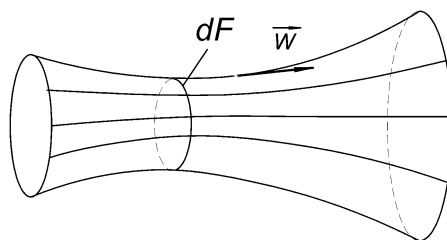


Траектория

Траектория – линия, соединяющая центры масс одной жидкой частицы в различные моменты времени. При стационарном течении траектория совпадает с линией тока.

Элементарная струйка. Трубка тока.

В движущейся жидкости выделим элементарную площадку dF и через все точки этой площадки проведем линии тока. Полученный объемный лучок линий тока называется элементарной стружкой, а его боковая поверхность - трубкой тока.



Особенности элементарной струйки:

1. т.к. площадка dF может быть выбрана сколь угодно малой, то параметры жидкости не изменяются поперек струйки, а могут изменяться только вдоль нее;
2. т.к. векторы скорости жидкости в каждой точке трубки параллельны ей, то отсутствует перетекание жидкости через трубку тока – она является непроницаемой для жидкости.

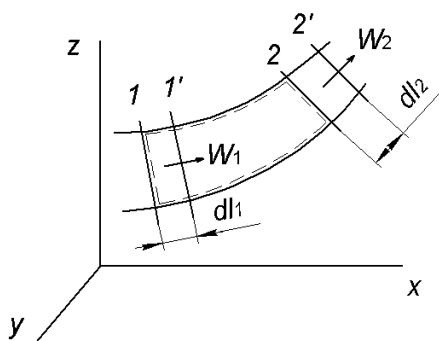
ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В СТРУЙКЕ

Анализ всех течений и решение всех задач механики жидкости и газа базируется на пяти основных уравнениях: неразрывности, количества движения (моментов количества движения), энергии, состояния и изменения энтропии.

Получим эти уравнения для стационарного (установившегося) течения жидкости в струйке, т.е. для одномерного течения (в струйке параметры жидкости меняются только по ее длине) с постоянным массовым расходом (для стационарного течения расход жидкости через любое сечение одинаков).

Уравнение неразрывности

Рассмотрим элементарную струйку.



В качестве контрольного объема выберем объем, ограниченный трубкой тока и сечениями 1 и 2.

За бесконечно малый промежуток времени dt выделенный объем жидкости переместится из положения 1-2 в положение 1'-2', первое сечение сместится на расстояние dl_1 , а второе – на расстояние dl_2 .

В соответствии с законом сохранения массы для стационарного случая масса жидкости, вытекающей в контрольный объем, должна быть равна массе жидкости, вытекающей из него:

$$dm_1 = dm_2.$$

Масса вытекающей жидкости в объем l_1 за время dt равна произведению плотности жидкости ρ_1 на объем $F_1 dl_1$:

$$dm_1 = \rho_1 F_1 dl_1.$$

Т.к. $dl_1 = W_1 dt$, то

$$dm_1 = \rho_1 F_1 W_1 dt.$$

Соответственно, масса вытекающей жидкости из объема l_2 за время dt

$$dm_2 = \rho_2 F_2 W_2 dt.$$

Приравнявая dm_1 и dm_2 , получаем

$$\rho_1 F_1 W_1 = \rho_2 F_2 W_2.$$

Это уравнение называется уравнением неразрывности.

Масса жидкости, протекающая через какое-либо поперечное сечение струйки в единицу времени называется массовым расходом

$$G = \rho F W \quad [\text{кг/с}].$$

$G_1 = G_2$ – уравнение расхода жидкости.

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, т.е. $\rho_1 = \rho_2$.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$F_1 W_1 = F_2 W_2.$$

$Q = F W$ – объемный расход жидкости [$\text{м}^3/\text{с}$].

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности однозначно связывает скорость жидкости с площадью канала, по которому жидкость течет.

Записанные уравнения являются интегральными. Можно получить уравнение неразрывности в дифференциальном виде. Для этого необходимо продифференцировать выражение $G = \rho F W$ и разделить левую часть полученного равенства на G , а правую – на $\rho F W$:

$$\frac{dG}{G} = \frac{W \rho dF + \rho F dW + F W d\rho}{\rho F W}.$$

В результате получается уравнение неразрывности в дифференциальном виде, справедливое для *переменного* расхода:

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{dW}{W} + \frac{d\rho}{\rho}.$$

Уравнение количества движения (первое уравнение Эйлера)

Это уравнение получается, как обобщение для жидкого объема уравнения изменения количества движения, записанного для жидкой частицы. Для жидкой частицы уравнение изменения количества движения формулируется следующим образом: изменение количества движения жидкой частицы равно импульсу действующих на эту частицу сил:

$$d(m_i \vec{W}_i) = \left(\sum \vec{P}_{Fi} + \sum \vec{P}_{mi} \right) dt$$

Здесь m_i и \vec{W}_i - масса и скорость жидкой частицы; $\sum \vec{P}_{Fi}$ и $\sum \vec{P}_{mi}$ - суммы поверхностных и массовых сил, действующих на жидкую частицу.

Для всей системы уравнение количества движения получается путем суммирования записанного уравнения по всем жидким частицам, входящим в систему:

$$d \sum_V (m_i \vec{W}_i) = \left(\sum \vec{P}_F + \sum \vec{P}_m \right) dt.$$

В правой части этого уравнения $\sum \vec{P}_F$ и $\sum \vec{P}_m$ - суммы *внешних* по отношению к системе поверхностных и массовых сил, т.е. сил, с которыми внешняя среда действует на систему. Силы взаимодействия жидких частиц внутри системы согласно третьему закону Ньютона уравновешены между собой (являются внутренними силами системы). Поэтому в уравнении они отсутствуют.

При выводе уравнения количества движения будем использовать тот же прием, что и при выводе уравнения неразрывности: рассмотрим перемещение жидкости через контрольный объем 1-2, ограниченный трубкой тока и двумя сечениями 1 и 2. За время dt жидкость, первоначально находящаяся в этом объеме, переместится и займет объем 1'-2'. Так как течение стационарное, то количество движения жидкости в объеме 1'-2, входящее в начальное и конечное значения количества движения перемещающегося объема, не изменится. Поэтому изменение количества движения выделенной системы будет равно разности количеств движения жидкости, вытекающей и втекающей в контрольный объем, т.е. разности количеств движения жидкости в объемах 2-2' (V_2) и 1-1' (V_1).

Вследствие того, что рассматривается течение в элементарной струйке, параметры жидкости по сечению которой постоянны, и за малый промежуток времени dt перемещение сечений 1 и 2 можно считать сколь угодно малыми, все жидкие частицы, находящиеся в объеме 1-1', будут иметь одну и ту же скорость \vec{W}_1 , а жидкие частицы, находящиеся в объеме 2-2' - скорость \vec{W}_2 .

Таким образом, изменение количества движения системы за время dt равно

$$d \sum_V (m_i \bar{W}_i) = \bar{W}_2 \sum_{V_2} m_i - \bar{W}_1 \sum_{V_1} m_i = \bar{W}_2 dm_2 - \bar{W}_1 dm_1.$$

Здесь dm_1 и dm_2 – массы жидкости, втекающей и вытекающей из контрольного объема за время dt .

В соответствии с законом сохранения массы для стационарного случая

$$dm_1 = dm_2 = dm.$$

Следовательно

$$d \sum_V (m_i \bar{W}_i) = dm(\bar{W}_2 - \bar{W}_1).$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение количества движения для системы, получаем:

$$dm(\bar{W}_2 - \bar{W}_1) = (\sum \bar{P}_F + \sum \bar{P}_m) dt.$$

Разделив обе части полученного уравнения на dt и учитывая, что $dm/dt = G$, имеем

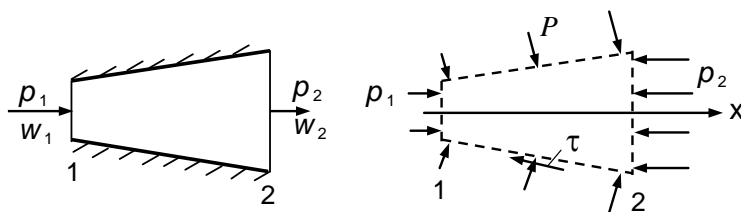
$$\sum \bar{P}_F + \sum \bar{P}_m = G(\bar{W}_2 - \bar{W}_1).$$

Сумма всех сил, приложенных к струйке жидкости на любом ее участке, равна приращению секундного количества движения (GW) на этом участке, или что, то же самое, произведению массового расхода на приращение скорости.

Уравнение количества движения – векторное уравнение. Оно может быть записано в проекциях на оси координат. Например, в проекции на ось x :

$$\sum P_{Fx} + \sum P_{mx} = G(W_{2x} - W_{1x}).$$

В качестве примера рассмотрим осесимметричный расширяющийся канал.



Порядок действий.

1. Выделяется система. Она изображена пунктирными линиями справа.
2. Выбирается ось x . Она совпадает с осью канала и направлена слева направо.
3. Действие стенок и жидкости (окружающей среды) на систему заменяется *распределенными* силами.

Будем считать, что массовые силы отсутствуют: $\sum P_{mx} = 0$. В этом случае уравнение количества движения в проекции на ось x запишется в следующем виде:

$$p_1 F_1 - p_2 F_2 + \left(\int_{F_6} p dF \right)_x - \left(\int_{F_6} \tau dF \right)_x = G(W_2 - W_1).$$

В этом уравнении $\left(\int_{F_6} p dF \right)_x = P_x$ – проекция на ось x силы, с которой *стенки канала*

действуют на жидкость, протекающую в канале; F_6 – площадь боковой поверхности канала.

Уравнение количества движения обычно используется для определения сил.

Уравнение количества движения в дифференциальном виде можно получить из интегрального уравнения, рассматривая течение жидкости между двумя близко

расположенными сечениями. В этом случае $F_1 \cong F_2$, $\left(\int_{F_6} p dF \right)_x \rightarrow 0$, $\left(\int_{F_6} \tau dF \right)_x \rightarrow 0$, $W_2 - W_1 =$

$= dW$, $p_2 - p_1 = dp$ и

$$- F dP = G dW$$

или с учетом того, что $G = \rho WF$

$$- F dP = \rho F W dW.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$- \frac{dp}{\rho} = W dW.$$

В соответствии с этим уравнением увеличение давления сопровождается уменьшением скорости и наоборот.

Уравнение моментов количества движения (второе уравнение Эйлера)

Для жидкой частицы сумма моментов внешних сил относительно произвольной оси равна полной производной по времени от момента количества движения жидкой частицы относительно той же оси:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i) = \sum \vec{M}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{P}_i)$$

Здесь m_i , \vec{W}_i – масса и скорость жидкой частицы; \vec{P}_i – внешние силы, действующие на жидкую частицу; $\sum \vec{M}_i$ – сумма моментов внешних сил; \vec{r}_i – радиус вектор центра масс жидкой частицы.

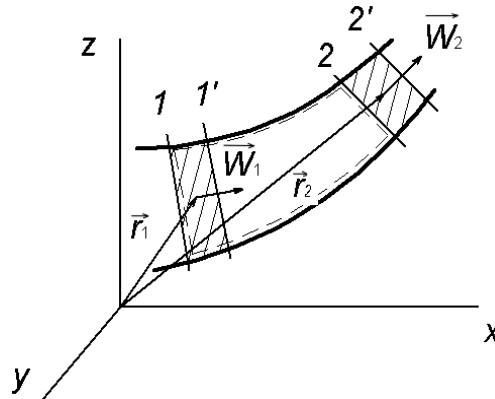
Для всей системы это уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_V (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i) = \sum \vec{M}$$

или

$$d \sum_V (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i) = \sum \vec{M} dt.$$

Рассмотрим перемещение жидкости через контрольный объем 1-2, выделенный в элементарной струйке.



В случае стационарного течения жидкости изменение момента количества движения выбранной системы (жидкости, первоначально заключенной в объеме 1-2) будет равно разности моментов количества движения жидкости, заключенной в объемах 2-2' и 1-1':

$$d \sum_V (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i) = \left(\vec{r}_2 \times \vec{W}_2 \sum_{V_2} m_i \right) - \left(\vec{r}_1 \times \vec{W}_1 \sum_{V_1} m_i \right) = (\vec{r}_2 \times dm_2 \cdot \vec{W}_2) - (\vec{r}_1 \times dm_1 \cdot \vec{W}_1).$$

В этом уравнении \vec{r}_1 и \vec{r}_2 - радиусы векторы центров масс объемов жидкости 1-1' и 2-2'; \vec{W}_1 и \vec{W}_2 - их скорости.

Т.к. $dm_1 = dm_2 = dm$, то

$$d \sum_V (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i) = dm [(\vec{r}_2 \times \vec{W}_2) - (\vec{r}_1 \times \vec{W}_1)].$$

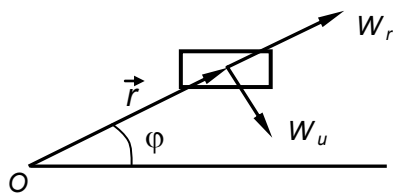
Принимая во внимание, что $dm = Gdt$ и подставляя полученное выражение для $d \sum_V (\vec{r}_i \times m_i \vec{W}_i)$ в исходное уравнение моментов количества движения системы, окончательно получаем:

$$\sum \vec{M} = G [(\vec{r}_2 \times \vec{W}_2) - (\vec{r}_1 \times \vec{W}_1)].$$

Согласно второму уравнению Эйлера сумма моментов всех сил, приложенных к жидкому объему (системе), равна разности моментов секундных количеств движения выходящей и входящей жидкости.

Момент внешних сил считается положительным, если вращение происходит по часовой стрелке при наблюдении с конца вектора.

В полярной системе координат запись уравнения моментов количества движения упрощается.



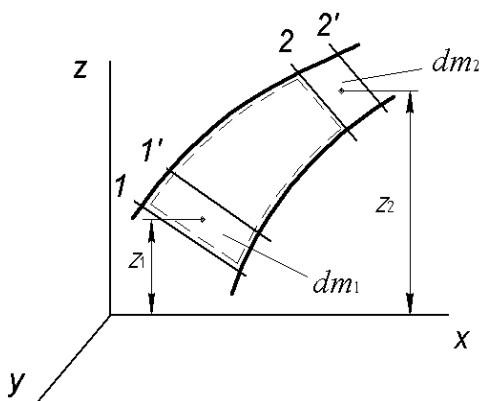
$$\Sigma M = G(W_{u2}r_2 - W_{u1}r_1)$$

ΣM – сумма моментов всех внешних сил, приложенных к какому-либо жидкому объему относительно начала координат; W_u – окружная составляющая скорости.

При записи последнего уравнения учтено, что моменты радиальных составляющих количества движения равны нулю.

Уравнение энергии

Рассмотрим изменение энергии системы – жидкости, в первоначальный момент времени заключенной в контрольном объеме, ограниченном трубкой тока и двумя сечениями 1 и 2.



За время dt система переместится из положения 1 – 2 в положение 1' – 2'.

При этом возможен обмен энергией между системой и окружающей средой:

1. в форме тепла.

За время dt система может обмениваться с окружающей средой теплом $dQ_{н1-2}$. Тепло считается положительным, если оно подводится к системе.

2. в форме технической работы.

За время dt к системе может быть подведена или отведена от нее техническая работа $dL_{тех1-2}$. Техническая работа связана с взаимодействием жидкости и перемещающихся твердых поверхностей (лопаток турбины, компрессора, насоса и т.п.). Она считается положительной, если система совершает работу над окружающей средой (течение газа в турбине).

Обмен энергией между системой и окружающей средой приводит к изменению полной энергии системы и отдельных составляющих этой полной энергии. Кроме этого возможен переход одного вида энергии в другой внутри системы.

Изменение энергии системы за время dt равно разности между энергиями системы в положениях $1' - 2'$ и $1 - 2$. Так как рассматривается стационарное течение жидкости, то энергия жидкости в объеме $1' - 2'$ с течением времени не меняется. Поэтому изменение энергии жидкости за рассматриваемый промежуток времени равно разности энергий жидкости, заключенной в объемах $2 - 2'$ и $1 - 1'$.

С учетом того, что в случае стационарного течения массы жидкости, вытекающей в контрольный объем $1 - 2$ и вытекающей из него, равны ($dm_1 = dm_2 = dm$), за время dt отдельные виды энергии вследствие взаимодействия системы с окружающей средой и перераспределения энергии между ее составляющими внутри системы могут измениться на величину:

1. кинетическая энергия

$$dE_k = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} dm$$

2. внутренняя (тепловая) энергия

$$dE_T = (u_2 - u_1) dm$$

3. потенциальная энергия положения

$$dE_{\Pi} = g (z_2 - z_1) dm$$

4. потенциальная энергия давления

$$dE_p = \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) dm$$

Действительно, силы давления, действующие в сечениях струйки 1 и 2 , за время dt совершают работу

$$- p_1 F_1 W_1 dt = - \frac{p_1}{\rho_1} dm \quad \text{и} \quad p_2 F_2 W_2 dt = \frac{p_2}{\rho_2} dm$$

В сечении 1 эта работа отрицательна, так как окружающая среда совершает работу над системой. В сечении 2 система совершает работу над окружающей средой и эта работа положительна.

Силы давления, действующие на боковую поверхность струйки, работы не совершают, так как они перпендикулярны вектору скорости.

Таким образом, при перемещении системы из положения $1 - 2$ в положение $1' - 2'$ система совершает работу $\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) dm$, которая равна изменению потенциальной энергии давления системы dE_p .

Реальная жидкость обладает вязкостью, которая приводит к возникновению сил и работы трения. При этом можно выделить работу сил трения на поверхности струйки и внутри нее (внутри системы). Внутри системы вследствие трения между слоями жидкости выделяется тепло, которое является внутренним и воспринимается системой. Работа сил трения на поверхности струйки является внешней по отношению к системе. Предположим, что все тепло, выделяющееся на поверхности струйки в результате трения, также воспринимается системой.

С учетом сделанного предположения вся работа трения на границе и внутри системы ($dL_{\text{тр}1-2}$) переходит в тепло ($dQ_{\text{вн}1-2}$), идущее на нагрев системы (выделенного объема жидкости), т.е. $dL_{\text{тр}1-2} = dQ_{\text{вн}1-2}$.

Это обстоятельство при составлении баланса энергии для системы позволяет не учитывать работу трения и равное ей количество тепла, выделяющегося в результате трения.

С учетом этого в соответствии с законом о сохранении и превращении энергии количество энергии, которой система обменилась с окружающей средой, равно изменению ее полной энергии за тот же промежуток времени:

$$dQ_{\text{н}1-2} - dL_{\text{тех}1-2} = (u_2 - u_1)dm + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} dm + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) dm + g(z_2 - z_1)dm$$

Разделим обе части этого уравнения на dm и введем обозначения:

$\frac{dQ_{\text{н}1-2}}{dm} = q_{\text{н}1-2}$ - удельное (на 1 кг жидкости) количество внешнего тепла, подведенного к жидкости между сечениями струйки 1 и 2;

$\frac{dL_{\text{тех}1-2}}{dm} = l_{\text{тех}1-2}$ - удельная (на 1 кг жидкости) техническая работа, совершаемая между сечениями 1 и 2 струйки.

После этого интегральное уравнение энергии принимает окончательный вид:

$$q_{\text{н}1-2} - l_{\text{тех}1-2} = (u_2 - u_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + g(z_2 - z_1) \quad [\text{Дж/кг}]$$

Это уравнение называется уравнением энергии в тепловой форме, так как оно содержит в явном виде внешнее тепло, подведенное к системе.

Уменьшая расстояние между сечениями 1 и 2 до бесконечно малой величины, в пределе из интегрального уравнения получим уравнение энергии для струйки в дифференциальной форме:

$$dq_{\text{н}} - dl_{\text{тех}} = du + d \frac{W^2}{2} + d \frac{p}{\rho} + g dz$$

Введем в рассмотрение теплосодержание или энтальпию жидкости

$$i = u + pv = u + p/\rho; \quad i = c_p T$$

v - удельный объем; $v = 1/\rho$.

Подставляя последнее выражение в интегральное уравнение энергии, получаем

$$q_{н1-2} - l_{тех 1-2} = (i_2 - i_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Обобщенное уравнение Бернулли для установившегося течения в элементарной струйке (уравнение энергии в механической форме)

Из уравнения энергии в тепловой форме можно получить уравнение энергии, не содержащее в явном виде тепло. Это уравнение называется уравнением энергии в механической форме или уравнением Бернулли.

Ранее было получено уравнение энергии в дифференциальной форме, записанное относительно неподвижной системы координат

$$dq_n - dl_{тех} = du + \frac{dW^2}{2} + d \frac{p}{\rho} + g dz .$$

Добавим в левую часть этого уравнения тепло, выделяющееся в результате трения $dq_{вн}$, а в правую часть – равную ему работу трения $dl_{тр}$ и обозначим $dq_n + dq_{вн} = dq_\Sigma$. В результате получим:

$$dq_\Sigma - dl_{тех} = du + \frac{dW^2}{2} + d \frac{p}{\rho} + g dz + dl_{тр} \quad (1)$$

$$d \frac{p}{\rho} = d(pv) = p dv + v dp$$

$p dv$ – работа деформации; $v dp$ – работа проталкивания.

Запишем уравнение первого закона термодинамики для системы в координатах, связанных с этой системой

$$dq_\Sigma = du + p dv \quad (2)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):

$$- dl_{тех} = \frac{dW^2}{2} + \frac{dp}{\rho} + g dz + dl_{тр} \quad (3)$$

Это уравнение Бернулли, записанное в дифференциальной форме. В соответствии с этим уравнением техническая работа, подведенная к системе, идет на изменение кинетической

энергии, потенциальной энергии положения жидкости, совершение работы проталкивания и преодоление гидравлических сопротивлений.

Интегральное уравнение Бернулли получается интегрированием дифференциального уравнения (3):

$$-l_{\text{тех } 1-2} = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{тр } 1-2}. \quad (4)$$

Последний член в правой части этого уравнения $l_{\text{тр } 1-2}$ учитывает работу, совершенную вязкой жидкостью по преодолению гидравлических сопротивлений. Эта работа называется гидравлическими потерями. Гидравлические потери связаны с вязкостью жидкости и складываются из местных гидравлических потерь l_{mi} и потерь на трение или линейных потерь $l_{\text{тр.лин}}$: $l_{\text{тр } 1-2} = l_{mi} + l_{\text{тр.лин}}$.

Местные потери – это затраты энергии жидкости на образование и поддержание вихрей в вязкой жидкости на участках каналов переменной формы и размеров, а также на совершение работы трения на этих участках. Местные потери рассчитываются по формуле Вейсбаха

$$l_{mi} = \xi_i \frac{W_i^2}{2},$$

в которой W_i – среднemasсовая скорость в сечении i канала; ξ_i – коэффициент местного сопротивления.

Потери на трение это затраты энергии на преодоление трения при течении вязкой жидкости в прямых каналах постоянного сечения. Для их расчета используется формула Дарси-Вейсбаха:

$$l_{\text{тр.лин}} = \xi_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{W^2}{2}$$

В этой формуле $\xi_{\text{тр}}$ – коэффициент трения.

Работа трения всегда считается положительной.

Значение интеграла $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$ в правой части уравнения (4) может быть получено только для конкретного термодинамического процесса, протекающего в системе.

Для нас важны два процесса – изохорный ($\rho = \text{const}$) и изоэнтروпийный (обратимый).

Изохорный процесс (несжимаемая жидкость)

$$dv = 0 \text{ или } \rho = \text{const} \quad (\rho = 1/v)$$

В этом случае

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

и уравнение Бернулли принимает вид:

$$-l_{\text{тех}1-2} = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{тр}1-2}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} + gz_1}_{\text{полный напор } H_1, \text{ выраженный в Дж/кг}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} + gz_2}_{\text{полный напор } H_2, \text{ выраженный в Дж/кг}} + l_{\text{тех}1-2} + l_{\text{тр}1-2} \quad [\text{Дж/кг}]$$

Сумма $\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} + gz = H$ представляет собой полную механическую энергию 1 кг

жидкости и называется полным напором, выраженным в Дж/кг. Её составляющие: $\frac{p}{\rho}$ -

потенциальная энергия давления или пьезометрический напор; $\frac{W^2}{2}$ - кинетическая энергия

жидкости или скоростной напор; gz - потенциальная энергия положения.

В соответствии с последним уравнением полная механическая энергия жидкости может быть изменена за счет совершения технической работы или за счет работы трения.

Возможны другие виды записи уравнения Бернулли.

Если все члены последнего уравнения умножить на ρ , то получим уравнение Бернулли, все члены которого имеют размерность Па.

Если исходное уравнение разделить на g , то все члены уравнения будут выражены в метрах

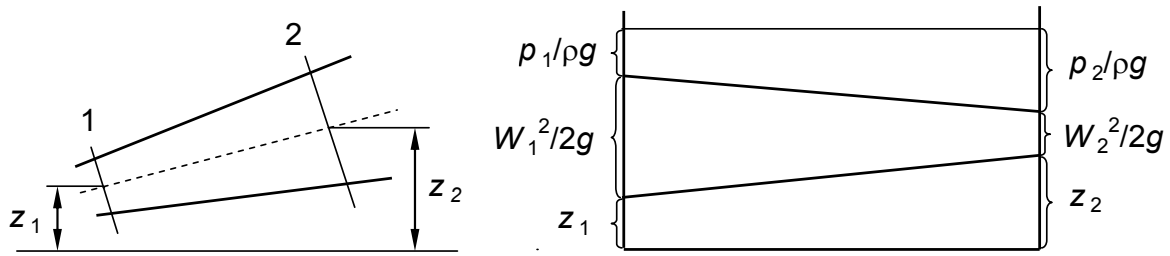
$$\underbrace{\frac{p_1}{\rho g} + \frac{W_1^2}{2g} + z_1}_{\text{полный напор } H_1, \text{ выраженный в м}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho g} + \frac{W_2^2}{2g} + z_2}_{\text{полный напор } H_2, \text{ выраженный в м}} + \frac{l_{\text{тех}1-2}}{g} + \frac{l_{\text{тр}1-2}}{g} \quad [\text{м}]$$

В случае энергетически изолированного течения ($l_{\text{тех}1-2} = 0$) идеальной жидкости ($l_{\text{тр}1-2} = 0$) имеем:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{W_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{W_2^2}{2g} + z_2 = H$$

Это уравнение называется уравнением трёх высот, в соответствии с которым в приведенных условиях ($l_{\text{тех}1-2} = 0$, $l_{\text{тр}1-2} = 0$) сумма трёх высот - геометрической (z), пьезометрической ($\frac{p}{\rho g}$) и динамической ($\frac{W^2}{2g}$) сохраняет неизменное значение.

При этом при сохранении постоянным полного напора возможны превращения одного вида механической энергии в другие. Изобразим это графически.



Изоэнтروпийный процесс ($dS_{\text{тр}} = 0$)

Уравнение изоэнтропы имеет вид:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$$

Используя это уравнение, можно записать следующее равенство, связывающее плотности и давления в начальной и текущей точках процесса:

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p}{\rho^k}$$

Откуда
$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}}$$

С учетом этого

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1 p^{1/k}} dp = \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1} \int_1^2 p^{-1/k} dp = \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)} \left[p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

и уравнение Бернулли записывается в виде:

$$-l_{\text{тех 1-2}} = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + g(z_2 - z_1).$$

Так как изоэнтропийный процесс – идеальный адиабатный процесс, то в последнем уравнении $l_{\text{тр 1-2}} = 0$.

Полученные основные уравнения механики жидкости и газа – уравнение неразрывности, количества движения (или моментов количества движения) и энергии – не позволяют рассчитать течение жидкости, т.к. количество неизвестных в них (p , T , ρ , \vec{W} , F) превышает количество этих уравнений. Для замыкания системы уравнений к полученным уравнениям необходимо добавить уравнение состояния, уравнение изменения энтропии и ряд дополнительных соотношений.

Уравнение состояния

Уравнение состояния связывает параметры состояния системы.

Уравнение состояния реального газа

При записи уравнения состояния реальных газов необходимо учитывать то, что их молекулы имеют конечные собственные объемы и связаны между собой силами взаимодействия, которые могут быть силами притяжения или отталкивания в зависимости от расстояния между молекулами.

Известно много уравнений состояния реального газа, каждое из которых имеет свою область применения. Наиболее теоретически обоснованными являются уравнения состояния реального газа в виде ряда с вириальными коэффициентами $B_1 = 1$, B_2 , B_3 и т.д., выражающимися через потенциал межмолекулярного взаимодействия для данного газа и его температуру. При разложении давления в ряд по степеням плотности газа его вириальное уравнение состояния записывается следующим образом:

$$p = \rho RT [1 + B_2(T)\rho + B_3(T)\rho^2 + B_4(T)\rho^3 + \dots].$$

Статистическая физика позволяет вычислить вириальные коэффициенты и их температурную зависимость, если известен потенциал межмолекулярного взаимодействия для данного газа. При этом B_2 определяется взаимодействием двух частиц, B_3 - одновременным взаимодействием трех частиц и т.д. Вероятность молекулярных столкновений быстро падает с ростом порядка столкновений; вместе с этим быстро убывают и члены ряда. Для описания основных особенностей поведения реальных газов обычно бывает достаточно второго вириального коэффициента. Вириальное уравнение применяют для описания газов малой и умеренной плотности, не превышающей 30-40% от критической. Для описания с помощью вириального уравнения более плотных газов требуется вводить большое число членов ряда и, следовательно, определять большое количество вириальных коэффициентов, что связано с существенными трудностями. При плотностях, соответствующих жидкому состоянию вещества, вириальное разложение расходится. Для состояний вблизи критической точки жидкость – газ вириальное уравнение в принципе непригодно, т.к. в этом случае зависимость термодинамических свойств от температуры и плотности (давления) не имеет аналитического выражения.

Наиболее простым и качественно верно отображающим изменение состояния реального газа является уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$(p + a\rho^2)(1 - b\rho) = \rho RT \quad \text{или} \quad p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2,$$

в котором: a и b – коэффициенты, учитывающие силы притяжения между молекулами газа и собственный объем этих молекул, соответственно.

При малых плотностях газа ($b\rho \ll 1$) уравнение Ван-дер-Ваальса может быть записано в виде вириального уравнения с коэффициентами $B_2(T) = b - a/(RT)$, $B_3 = B_4 = \dots = B_n = 0$.

При больших давлениях можно использовать уравнение состояния М.П. Вукаловича и И.И. Новикова:

$$(p + a\rho^2)(1 - b\rho) = \rho RT \left[1 - \frac{c\rho}{T^{(3+2m)/2}} \right],$$

в котором: a и b – постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса; c и m – эмпирические постоянные.

Уравнение состояния совершенного газа

Уравнение состояния совершенного газа получается из вириального уравнения при $B_2 = B_3 = \dots = B_n = 0$:

$$p = \rho RT$$

Это уравнение может быть записано для каждого сечения струйки:

$$p_1 = \rho_1 RT_1 \quad \text{и} \quad p_2 = \rho_2 RT_2$$

Уравнение состояния совершенного газа используется в случаях, когда его состояние далеко от областей фазовых превращений.

Уравнение состояния несжимаемой жидкости

Для несжимаемой жидкости плотность не зависит от давления и температуры, и её уравнение состояния записывается следующим образом:

$$\rho = \text{const} .$$

Энтропия. Уравнение изменения энтропии. Полезная внешняя работа

Энтропия является функцией состояния. Обычно рассматривают удельную энтропию, отнесенную к единице массы газа.

В конечных *изолированных (адиабатических)* системах самопроизвольные реальные процессы протекают необратимо, приближая систему к состоянию равновесия. При этом энтропия системы возрастает. Если же в изолированной системе протекает обратимый процесс, то энтропия остается постоянной. Поэтому второй закон термодинамики для изолированных (адиабатических) систем записывается следующим образом:

$$dS = \frac{dq_{\text{вн}}}{T} \geq 0.$$

В этом выражении dS – изменение энтропии в элементарном процессе; $dq_{\text{вн}}$ – элементарное количество тепла, выделившегося в системе за счет необратимых процессов.

Для *неизолированных* систем, участвующих в энергетическом обмене с внешней средой, энтропия может изменяться как за счет тепла $dq_{\text{вн}}$, выделяющегося в системе, так и за счет тепла $dq_{\text{н}}$, которым система обменивается с окружающей средой:

$$dS = \frac{dq_{\Sigma}}{T} = \frac{dq_{\text{н}} + dq_{\text{вн}}}{T}$$

В этом случае энтропия может как возрастать, так и убывать.

Используя последнее уравнение совместно с уравнением первого закона термодинамики

$$dq_{\Sigma} = du + pdv = c_v dT + pdv \quad (dq_{\Sigma} = dq_{\text{н}} + dq_{\text{вн}})$$

можно получить уравнения изменения энтропии

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{k-1} \right]; \quad S_2 - S_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k \right]; \quad S_2 - S_1 = c_v \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^k \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{k-1} \right]$$

Эти уравнения связывают изменение энтропии с изменением параметров состояния газа.

Если вдоль траектории движения частицы выполняется равенство $dS = 0$, т.е. энтропия сохраняет свою величину, то такое движение называется *изоэнтропическим*. В этом случае из последних уравнений при $S_2 - S_1 = 0$ можно получить связь между параметрами состояния газа (*уравнение изоэнтропы*):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1}.$$

В этом уравнении k – показатель изоэнтропы.

Согласно второму началу термодинамики в адиабатической системе энтропия является неубывающей функцией времени. Возрастание энтропии в адиабатической системе показывает, что внутри этой системы происходят необратимые процессы преобразования механической энергии в тепло, сопровождаемые потерями механической энергии. Примером образования таких механических потерь могут служить потери на внутреннее трение в реальных (вязких) жидкостях и газах. В случае необратимого процесса действительная полезная внешняя работа L , совершаемая системой, меньше максимальной (теоретической) работы L_{max} , которая может быть совершена системой с теми же исходными параметрами

состояния в обратимом процессе, на величину $T_0\Delta S$ (T_0 – температура окружающей среды; ΔS – изменение энтропии системы и окружающей среды):

$$L = L_{\max} - T_0\Delta S.$$

Математическая модель струйки постоянного массового расхода

Математическая модель струйки постоянного массового расхода включает:

1. уравнение неразрывности

$$\rho_1 F_1 W_1 = \rho_2 F_2 W_2$$

2. уравнение количества движения

$$\sum \bar{P}_F + \sum \bar{P}_m = G(\bar{W}_2 - \bar{W}_1)$$

или уравнение моментов количества движения

$$\sum \bar{M} = G[(\bar{r}_2 \times \bar{W}_2) - (\bar{r}_1 \times \bar{W}_1)]$$

3. уравнение энергии

а) в тепловой форме

$$q_{н1-2} - l_{\text{тех}1-2} = (i_2 - i_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

б) в механической форме

$$-l_{\text{тех}1-2} = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{тр}1-2}$$

4. уравнение состояния

а) совершенного газа

$$p_1 = \rho_1 R T_1 \quad \text{и} \quad p_2 = \rho_2 R T_2$$

б) несжимаемой жидкости

$$\rho = \text{const}$$

5. дополнительные выражения и уравнения

а) формулы для расчета гидравлических потерь в уравнении Бернулли при течении вязкой жидкости (в такой жидкости протекают необратимые процессы ($dS_{\text{вн}} > 0$), в которых существуют потери механической энергии жидкости, связанные с преобразованием части этой энергии в тепловую энергию при совершении работы трения).

Используются выражения для $l_{\text{м}i}$ и $l_{\text{тр.лин}}$. Их сумма $l_{\text{тр}1-2}$ подставляется в правую часть уравнения Бернулли.

б) уравнение изоэнтропы (уравнение идеального адиабатического процесса), связывающее параметры состояния жидкости в обратимом процессе ($dS_{\text{вн}} = 0$) – при течении идеальной жидкости

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{k-1}$$

в) формулы, связывающие энтальпию с температурой

$$i_1 = c_p T_1, \quad i_2 = c_p T_2$$

б. граничные (краевые) условия – условия по давлению на границах системы.

Это математическая модель струйки, в которой уравнения записаны через статические параметры течения. Она может быть использована для расчета течений как несжимаемой, так и сжимаемой жидкости. Но ее нельзя использовать для анализа изменения параметров сжимаемого газа. Для расчета и анализа изменения параметров сжимаемого газа используется модель струйки, в которой уравнения записываются в газодинамической форме.

ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ СТРУЙКИ

В этом разделе вводятся новые понятия: полная температура (температура торможения) T^* , полное давление (давление торможения) p^* , скорость звука a , максимальная скорость W_{\max} , число Маха M , приведенная скорость (коэффициент скорости) λ , относительная скорость (Λ), газодинамические функции.

Полная температура (температура торможения)

Запишем уравнение энергии в тепловой форме:

$$q_{n1-2} - l_{\text{тех } 1-2} = (i_2 - i_1) + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

При расчете газовых течений изменением потенциальной энергии положения газа $g(z_2 - z_1)$ можно пренебречь по сравнению с другими членами уравнения энергии и записать это уравнение следующим образом:

$$q_{n1-2} - l_{\text{тех } 1-2} = \left(i_2 + \frac{W_2^2}{2} \right) - \left(i_1 + \frac{W_1^2}{2} \right)$$

Введем обозначение $i^* = i + \frac{W^2}{2}$. С учетом этого уравнение энергии принимает вид:

$$q_{n1-2} - l_{\text{тех } 1-2} = i_2^* - i_1^*$$

Правая часть этого уравнения, которое называется уравнением энтальпии или теплосодержания, описывает изменение полной энергии газа. Поэтому величина i^* называется полной энтальпией газа. Она является полной удельной энергией газа (энергией 1 кг газа).

Полной энтальпии соответствует полная температура

$$T^* = T + \frac{W^2}{2c_p}$$

Так как полная температура пропорциональна полной энтальпии газа, то она также характеризует полную удельную энергию газа.

Температура T – статическая температура газа.

Используя полную температуру, можно переписать уравнение энтальпии в виде:

$$q_{н1-2} - l_{тех1-2} = c_p (T_2^* - T_1^*).$$

Из уравнения энтальпии следует, что в случае энергетически изолированного течения ($q_{н1-2} = 0$, $l_{тех1-2} = 0$) полная энтальпия и полная температура газа остаются неизменными.

Рассмотрим энергетически изолированное торможение газа между двумя сечениями струйки 1 и 2 от скорости W_1 в сечении 1 до нулевой скорости в сечении 2 ($W_2 = 0$). Так как при этом полная температура остается постоянной, то:

$$T_1^* = T_1 + \frac{W_1^2}{2c_p} = T_2^* = T_2 + \frac{W_2^2}{2c_p} = T_2.$$

Т.е. в этом случае полная температура газа равна статической температуре заторможенного (неподвижного) газа.

Таким образом, полная температура - это то значение температуры, которое принимает газ в энергетически изолированном процессе полного торможения. Поэтому полная температура называется еще температурой торможения, а полная энтальпия – энтальпией торможения.

Максимальная или предельная скорость движения газа

Наряду с температурой торможения полную энергию газа характеризует его максимальная скорость движения. Это скорость газа, которая теоретически может быть получена при полном преобразовании тепловой энергии (теплосодержания) в кинетическую энергию в энергетически изолированном процессе.

Из соотношения

$$i^* = i + \frac{W^2}{2} = \text{const}$$

следует, что максимальная скорость достигается в случае $i = 0$. При этом

$$i^* = \frac{W_{\max}^2}{2} \text{ или } W_{\max} = \sqrt{2i^*} = \sqrt{2c_p T^*}$$

Для воздуха при $T = 300\text{К}$ $c_p = 1005$ Дж/(кг·К) и $W_{\max} = 776$ м/с.

Максимальная скорость течения газа используется редко. Одной из причин этого является невозможность её измерения.

Полное давление (давление торможения)

Рассмотрим торможение газа между двумя сечениями струйки в энергетически изолированном ($q_{н1-2} = 0$, $l_{тех1-2} = 0$) изоэнтропийном ($dS_{тр} = 0$) процессе от скорости $W_1 = W$ (при этом $p_1 = p$, $\rho_1 = \rho$) до скорости $W_2 = 0$ (при этом $p_2 = p^*$). В этом случае уравнение Бернулли имеет вид:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \left[\left(\frac{p^*}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{W^2}{2}$$

Отсюда

$$p^* = p \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{\rho W^2}{kp} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Давление p^* называется полным давлением или давлением торможения. Это выражение справедливо для газа, как без учета, так и с учетом сжимаемости. Подобное выражение для давления торможения несжимаемой жидкости (несжимаемого газа) можно получить из уравнения Бернулли для случая $\rho = \text{const}$ применительно к струйке, в которой жидкость тормозится от $W_1 = W$ (при этом $p_1 = p$) до $W_2 = 0$ (при этом $p_2 = p^*$) при условии, что $l_{тех1-2} = 0$ и $l_{тр1-2} = 0$ ($dS_{тр} = 0$)

$$p^* = p + \frac{\rho W^2}{2}.$$

Можно дать следующее определение полному давлению (давлению торможения). Полное давление или давление торможения – то значение давления, которое принимает газ или жидкость при их полном торможении до нулевой скорости в энергетически изолированном изоэнтропийном процессе.

Полное давление характеризует полную механическую энергию газа или жидкости.

Связь полного давления с энтропией и полной температурой

Изменение полного давления связано с изменением энтропии и изменением полной энергии системы. Получим выражение, устанавливающее эту связь.

Ранее полученное уравнение изменения энтропии можно представить в виде:

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Так как $\rho = \frac{p}{RT}$, то

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = (c_v + R) \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$c_p - c_v = R$, следовательно

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

При изоэнтропийном торможении потока значение энтропии не меняется. Поэтому в последнем уравнении статические параметры можно заменить на параметры торможения – при этом левая часть уравнения не меняется:

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*}.$$

Отсюда получаем

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\left(\frac{S_2 - S_1}{R} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_1^*}{T_2^*} \right)}$$

Отношение давлений торможения p_2^*/p_1^* обозначается σ и называется коэффициентом сохранения полного давления или коэффициентом восстановления полного давления или коэффициентом потерь полного давления.

Изменение давления торможения зависит только от изменения энтропии и температуры торможения на рассматриваемом участке струйки. Увеличение энтропии всегда способствует уменьшению давления торможения, а увеличение температуры торможения – его увеличению.

Частные случаи

1. Энергетически изолированный процесс.

В этом процессе $q_{н1-2} = 0$, $l_{тех 1-2} = 0$ или $T_1^* = T_2^*$ и

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\frac{S_2 - S_1}{R}}.$$

В энергетически изолированном процессе изменение давления торможения однозначно связано с изменением энтропии. Так как процесс энергетически изолированный, то изменение энтропии может произойти только в результате диссипативных процессов – за счет трения: $\Delta S_{тр} = S_2 - S_1$.

В этом случае при анализе процесса (обратимый или необратимый) энтропию можно заменить на давление торможения.

2. Энергетически изолированный изоэнтропийный (обратимый) процесс.

В этом процессе $q_{н1-2} = 0$, $l_{тех 1-2} = 0$ или $T_1^* = T_2^*$ и $\Delta S_{тр} = 0$.

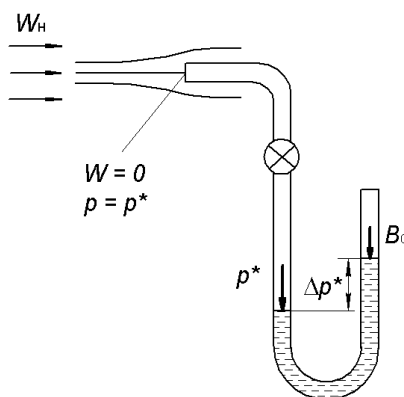
В энергетически изолированном изоэнтропийном процессе давление торможения остается постоянным:

$$p_1^* = p_2^* .$$

Измерение параметров торможения и определение скорости потока

Измерение давления торможения в потоке

Давление торможения измеряется с помощью трубки Пито – трубки с открытым концом, установленной навстречу потоку.



На срезе трубки газ тормозится до нулевой скорости и $p = p^*$. Присоединенный к трубке пьезометр покажет разность давлений $\Delta p^* = p^* - B_0$. Давление торможения будет равно: $p^* = B_0 + \Delta p^*$. В некоторых случаях $p^* < B_0$. Поэтому в общем виде $p^* = B_0 \pm \Delta p^*$.

Определение скорости жидкости и газа

При энергетически изолированном изоэнтропийном торможении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) из уравнения Бернулли получаем:

$$p^* = p + \frac{\rho W^2}{2} .$$

Откуда

$$W = \sqrt{\frac{2(p^* - p)}{\rho}} .$$

В этом случае необходимо измерить только давления p^* и p . Плотность жидкости известна.

При энергетически изолированном изоэнтропийном торможении газа

$$p^* = p \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{\rho W^2}{kp} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

или с учётом уравнения состояния газа $p = \rho RT$

$$p^* = p \left(1 + \frac{k-1}{2} \frac{W^2}{kRT} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (1)$$

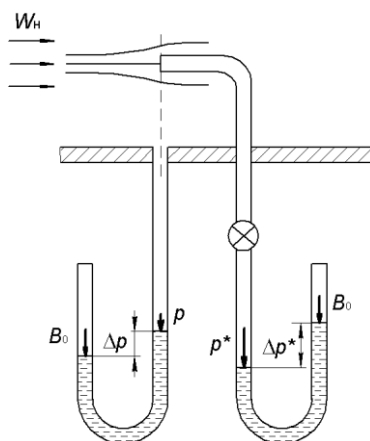
Для газа кроме давлений p^* и p необходимо измерить его температуру T . С помощью датчиков температуры обычно измеряется температура торможения газа T^* , а статическая температура находится из уравнения

$$T = T^* - \frac{W^2}{2c_p}. \quad (2)$$

В случае газовых течений скорость газа определяется по измеренным p^* , p и T^* из решения уравнений (1) и (2).

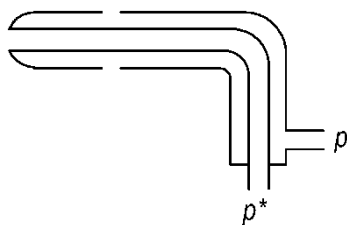
Измерение статического давления

Измерение статического давления, как правило, производится на внутренней поверхности канала, по которому течет газ. Для этого в стенке канала сверлится отверстие диаметром порядка 0,5 мм, которое с помощью трубки соединяется с прибором, измеряющим давление (на рисунке с пьезометром). На рисунке показано одновременное измерение полного и статического давлений.



При проведении эксперимента измеряются $\Delta p^* = p^* \pm B_0$ и $\Delta p = p \pm B_0$, по которым определяются p^* и p : $p^* = B_0 \pm \Delta p^*$ и $p = B_0 \pm \Delta p$.

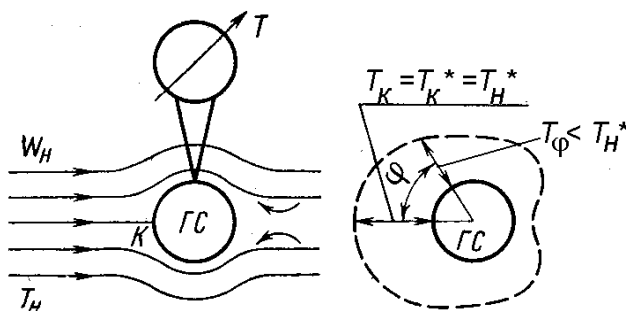
Прандтль усовершенствовал трубку Пито, добавив к ней кожух с отверстиями. Эти отверстия располагаются в сечении, в котором давление равно статическому давлению в потоке. При этом одновременно измеряются p^* и p .



Эта трубка называется трубкой Прандтля-Пито.

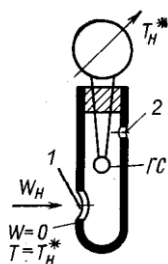
Измерение температуры торможения

Температура торможения может быть измерена с помощью термометра, термосопротивления, термопары и т.п. Рассмотрим неподвижную термопару, помещенную в движущийся газ ("горячий" спай термопары обозначен ГС).



Газ, текущий в центральной струйке, при подходе к точке K (критическая точка) энергетически изолированно тормозится до нулевой скорости $W_K = 0$. Если поверхность термопары теплоизолирована, то $T_K = T_K^* = T_H^*$. Во всех остальных точках поверхности термопары скорость газа будет также равна нулю, но не за счет адиабатного сжатия, а за счет трения. При этом вся кинетическая энергия газа превратится в тепло. Основная доля этого тепла идет на нагрев термопары. Но вследствие теплообмена между соседними слоями газа часть этого тепла пойдет на нагрев газа, обтекающего поверхность термопары, и температура стенки $T_w = T_\phi$ будет меньше T_H^* , но больше T_H : $T_H < T_w < T_H^*$.

Для того чтобы измерить температуру, близкую к температуре торможения, термопару помещают в специальную камеру.



Скорость звука

Под скоростью звука a в МЖГ понимается скорость распространения волн слабого сжатия и разрежения в изоэнтروпийном процессе. Из физики известно, что в этом случае

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

С учетом уравнения изоэнтропы

$$p = c\rho^k$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{dp}{d\rho} = ck\rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho^k} \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho} = kRT$$

и

$$a = \sqrt{kRT}.$$

Скорость звука зависит только от природы газа и статической температуры.

Число Маха

Число Маха – отношение скорости газа к скорости звука:

$$M = \frac{W}{a}.$$

Позже будет показано, что число Маха является величиной, с помощью которой можно оценивать сжимаемость газа. При $M \leq 0,3$ для расчета газовых течений можно использовать уравнения несжимаемой жидкости.

Предел изменения числа Маха: $0 \leq M < \infty$.

Параметры потока, соответствующие значению числа Маха, равному 1, называются критическими.

Критическая температура. Критическая скорость звука.

Воспользуемся выражением для i^* :

$$i^* = i + \frac{W^2}{2}.$$

Разделим обе части этого выражения на i и учтем, что $i = c_p T$, $i^* = c_p T^*$ и $c_p = \frac{kR}{k-1}$:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{W^2(k-1)}{2kRT}$$

Так как

$$kRT = a^2; \quad \frac{W^2}{a^2} = M^2,$$

то

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

При $M = 1$ $T = T_{кр}$ и, следовательно:

$$T_{кр} = \frac{2}{k+1} T^*.$$

Подставляя полученное выражение для $T_{кр}$ в формулу для скорости звука $a = \sqrt{kRT}$, получаем формулу для расчета критической скорости звука:

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$$

Критическая скорость звука конкретного газа зависит только от температуры торможения T^* и в энергетически изолированной системе, так же как и T^* , не меняется, т.е $a_{кр} = \text{const}$.

Приведенная скорость (коэффициент скорости)

Приведенная скорость или коэффициент скорости – отношение скорости газа к критической скорости звука:

$$\lambda = \frac{W}{a_{кр}}$$

Пределы изменения λ : $0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

Относительная скорость

Относительная скорость – отношение скорости газа к его максимальной скорости:

$$\Lambda = \frac{W}{W_{\max}}$$

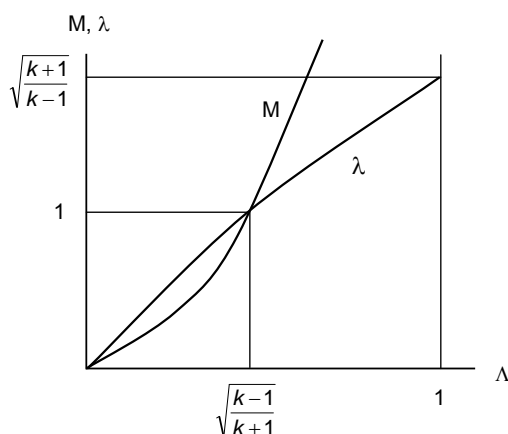
Пределы изменения Λ : $0 \leq \Lambda \leq 1$.

Связь между числом Маха, приведенной скоростью и относительной скоростью

Связь между M , λ и Λ определяется формулой:

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{k+1}{k-1} \Lambda^2$$

Графически эту связь можно изобразить следующим образом:



Газодинамические функции

Газодинамические функции – это безразмерные функции приведенной скорости λ (или M , или Λ), представляющие отношения параметров, комплексов параметров, размеров потока, часто встречающиеся в газодинамических уравнениях.

Газодинамические функции условно можно разделить на *три группы*.

В *первую группу* входят три функции, связывающие в одной точке пространства одноименные параметры торможения и статические параметры газа с его скоростью (λ , M или Λ).

Ранее была получена формула

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2.$$

Это отношение температур называется газодинамической функцией $\tau(M)$:

$$\tau(M) = \frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2.$$

Если в этой формуле заменить M на λ с использованием приведенной выше формулы, то получим газодинамическую функцию $\tau(\lambda)$:

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2.$$

Газодинамические функции вычислены для различных $k = c_p/c_v$ и сведены в таблицы – таблицы газодинамических функций. При этом аргументом является приведенная скорость λ . Поэтому далее будут рассматриваться газодинамические функции только от приведенной скорости λ .

Газодинамическая функция $\tau(\lambda)$ связывает значения статической температуры T , температуры торможения T^* и приведенной скорости λ в одной точке потока или в одном сечении струйки. В случае энергетически изолированного течения функция $\tau(\lambda)$ позволяет

связать статические температуры в двух сечениях струйки. В этом случае из уравнения энергии следует

$$T_1^* = T_2^*$$

или с учетом того, что $T^* = T/\tau(\lambda)$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)}.$$

Для изоэнтропийного процесса

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Следовательно,

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Это вторая газодинамическая функция $\pi(\lambda)$. Она связывает значения статического давления p , давления торможения p^* и приведенной скорости λ в одной точке потока или в одном сечении струйки. В случае энергетически изолированного изоэнтропийного течения функция $\pi(\lambda)$ позволяет связать статические давления в двух сечениях струйки. В энергетически изолированном изоэнтропийном течении давление торможения остается постоянным

$$p_1^* = p_2^*.$$

Это следует из выражения для коэффициента потерь полного давления

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_n^*} = e^{-\left(\frac{S_1 - S_n}{R} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_n^*}{T_1^*}\right)} \text{ при } T^* = \text{const (течение энергетически изолированное) и } S = \text{const}$$

(течение изоэнтропийное).

Так как $p^* = p/\pi(\lambda)$, то из последнего равенства

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}.$$

Третья газодинамическая функция $\varepsilon(\lambda)$ связывает значения плотности газа ρ , плотности заторможенного газа ρ^* и приведенной скорости λ в одной точке потока или в одном сечении струйки. Запишем уравнение изоэнтропы в виде

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Отсюда получаем

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В случае энергетически изолированного изэнтропийного течения функция $\varepsilon(\lambda)$ позволяет связать плотности газа в двух сечениях струйки. В энергетически изолированном изэнтропийном течении плотность заторможенного газа остается постоянной.

Действительно, в этом случае $T^* = \text{const}$ и $p^* = \text{const}$, следовательно $\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = \text{const}$, т.е.

$$\rho_1^* = \rho_2^*.$$

Из этого равенства, с учетом того что $\rho^* = \rho/\varepsilon(\lambda)$, получаем:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_1)}.$$

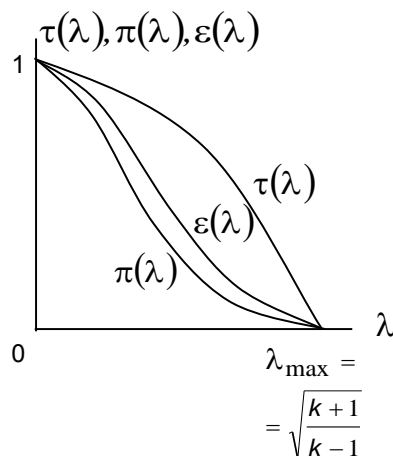
Связь между газодинамическими функциями $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ можно получить, почленно разделив уравнение состояния движущегося газа $p = \rho RT$ на уравнение состояния заторможенного газа $p^* = \rho^* RT^*$:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{T}{T^*}.$$

Отсюда

$$\pi(\lambda) = \varepsilon(\lambda) \tau(\lambda).$$

Вид газодинамических функций $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ приведен на графике.



Ко *второй группе* функций относятся функции, используемые при расчете массового расхода.

Для критического и произвольного сечений струйки можно записать

$$G = \rho_{\text{кр}} W_{\text{кр}} F_{\text{кр}} = \rho W F \quad (1)$$

Введем функцию

$$q(\lambda) = \frac{\rho W}{\rho_{кр} W_{кр}} = \frac{F_{кр}}{F} \quad (2)$$

Из (2) $\rho W = \rho_{кр} W_{кр} q(\lambda)$.

Подстановка этого выражения в (1) дает:

$$G = \rho_{кр} W_{кр} q(\lambda) F \quad (3)$$

$$W_{кр} = a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*} \quad (4)$$

Из уравнения изоэнтропы с учетом того, что $\rho^* = p^*/RT^*$ и $T_{кр} = \frac{2}{k+1} T^*$

$$\rho_{кр} = \rho^* \left(\frac{T_{кр}}{T^*} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{p^*}{RT^*} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (5)$$

Подставляя $W_{кр}$ из (4) и $\rho_{кр}$ из (5) в (3), получаем

$$G = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R} \frac{p^* q(\lambda) F}{\sqrt{T^*}}}$$

Введем обозначение $m = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{k}{R}}$. Тогда последнее выражение можно переписать

в виде:

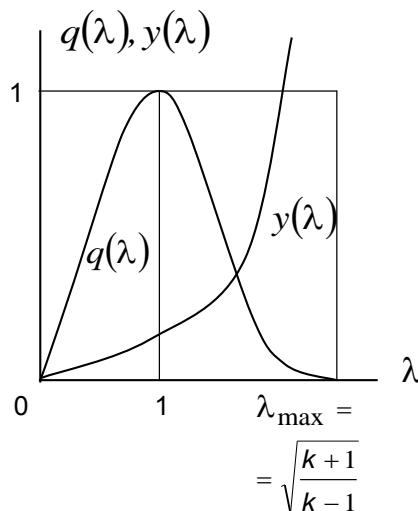
$$G = m \frac{p^* q(\lambda) F}{\sqrt{T^*}}. \quad (6)$$

Для воздуха $m = 0,0404$ (кг·К/Дж)^{1/2}.

Подставим в (6) $p^* = p/\pi(\lambda)$ и обозначим $y(\lambda) = q(\lambda)/\pi(\lambda)$. В результате получим

$$G = m \frac{py(\lambda)F}{\sqrt{T^*}}. \quad (7)$$

Функции $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ имеют вид



Выражения (6) и (7) позволяют записать уравнение неразрывности в виде:

$$m_1 \frac{p_1^* q(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 \frac{p_2^* q(\lambda_2) F_2}{\sqrt{T_2^*}}$$

или

$$m_1 \frac{p_1 y(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 \frac{p_2 y(\lambda_2) F_2}{\sqrt{T_2^*}}.$$

Частные случаи

1. Энергетически изолированное изоэнтропийное течение одного и того же газа. При этом $T_1^* = T_2^*$, $p_1^* = p_2^*$, $m_1 = m_2$ и уравнение неразрывности принимает вид:

$$q(\lambda_1) F_1 = q(\lambda_2) F_2.$$

В данном случае уравнение неразрывности устанавливает связь между площадью сечения струйки и скоростью газа в этом сечении.

2. Энергетически изолированное не изоэнтропийное течение одного и того же газа ($T_1^* = T_2^*$, $p_1^* \neq p_2^*$, $m_1 = m_2$). В этом случае уравнение неразрывности позволяет рассчитать коэффициент потерь полного давления между сечениями 1 и 2 струйки:

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1) F_1}{q(\lambda_2) F_2}.$$

К *третьей группе* газодинамических функций относятся функции, используемые при записи уравнения количества движения.

Ранее было получено уравнение количества движения в проекции на ось x для двух сечений струйки

$$p_1 F_1 - p_2 F_2 + P_x = G(W_2 - W_1),$$

в котором P_x – проекция на ось x силы, действующей со стороны трубки тока на газ; W_2 и W_1 – проекции вектора скорости на ось x в сечениях 2 и 1.

Перепишем это уравнение в виде:

$$P_x = (GW_2 + p_2 F_2) - (GW_1 + p_1 F_1).$$

Сумма $GW + pF = \Phi$ называется полным импульсом.

Таким образом, сила P_x равна разности полных импульсов газа в сечениях 2 и 1 струйки.

Введем функцию

$$z(\lambda) = \frac{2\Phi}{\Phi_{кр}}.$$

Здесь $\Phi_{кр} = GW_{кр} + p_{кр} F_{кр}$.

Из определения $z(\lambda)$ следует, что

$$\Phi = \frac{\Phi_{\text{кр}} z(\lambda)}{2} = \frac{z(\lambda)}{2} (GW_{\text{кр}} + p_{\text{кр}} F_{\text{кр}}).$$

Преобразуем выражение в скобках.

$$W_{\text{кр}} = a_{\text{кр}},$$

$$G = \rho_{\text{кр}} W_{\text{кр}} F_{\text{кр}} = \frac{p_{\text{кр}}}{RT_{\text{кр}}} a_{\text{кр}} F_{\text{кр}}.$$

Так как $T_{\text{кр}} = \frac{2}{k+1} T^*$, то

$$G = \frac{p_{\text{кр}}}{R \frac{2}{k+1} T^*} a_{\text{кр}} F_{\text{кр}} \frac{k}{k} = \frac{p_{\text{кр}} F_{\text{кр}} a_{\text{кр}} k}{\frac{2k}{k+1} RT^*}$$

С учетом того, что $a_{\text{кр}}^2 = \frac{2k}{k+1} RT^*$

$$G = \frac{p_{\text{кр}} F_{\text{кр}} k}{a_{\text{кр}}}.$$

Отсюда $p_{\text{кр}} F_{\text{кр}} = \frac{Ga_{\text{кр}}}{k}$.

Следовательно

$$\Phi = \frac{z(\lambda)}{2} \left(Ga_{\text{кр}} + \frac{Ga_{\text{кр}}}{k} \right)$$

или

$$\Phi = \frac{k+1}{2k} Ga_{\text{кр}} z(\lambda).$$

Функция $z(\lambda)$ равна $z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$

Введем еще две газодинамические функции - $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \frac{\Phi}{\Phi^*} = \frac{\Phi}{p^* F} = \lambda \varepsilon(\lambda) z(\lambda)$$

$$r(\lambda) = \frac{pF}{\Phi} = \frac{\pi(\lambda)}{f(\lambda)}$$

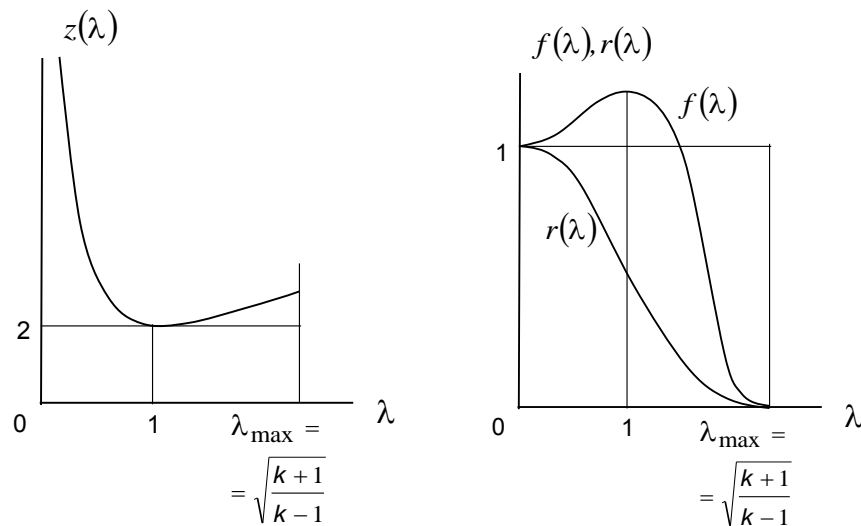
Тогда

$$\Phi = p^* F f(\lambda)$$

и

$$\Phi = \frac{pF}{r(\lambda)}.$$

Функции $z(\lambda)$, $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$ имеют вид



Таким образом, сила, с которой трубка тока действует на газ в струйке между двумя ее сечениями, равна

$$P_x = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Полный импульс газа может быть рассчитан следующим образом:

$$\Phi = \frac{k+1}{2k} G a_{кр} z(\lambda) = p^* F f(\lambda) = \frac{pF}{r(\lambda)}.$$

Математическая модель струйки в газодинамической форме для расчета параметров газового потока

Эта математическая модель включает следующие уравнения.

1. Уравнение неразрывности

$$m_1 \frac{p_1^* q(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 \frac{p_2^* q(\lambda_2) F_2}{\sqrt{T_2^*}} \quad \text{или} \quad m_1 \frac{p_1 y(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 \frac{p_2 y(\lambda_2) F_2}{\sqrt{T_2^*}}.$$

2. Уравнение количества движения

$$P_x = \Phi_2 - \Phi_1,$$

$$\text{в котором} \quad \Phi = \frac{k+1}{2k} G a_{кр} z(\lambda) = p^* F f(\lambda) = \frac{pF}{r(\lambda)}$$

3. Уравнение энергии

$$q_{н1-2} - l_{тех1-2} = i_2^* - i_1^* \quad \text{или} \quad q_{н1-2} - l_{тех1-2} = c_p (T_2^* - T_1^*)$$

4. Уравнение состояния

$$p = \rho RT \quad \text{или} \quad p^* = \rho^* RT^*$$

5. Дополнительные уравнения

а) уравнение, связывающее статические температуры в двух сечениях струйки в случае энергетически изолированного течения ($q_{н1-2} = 0$, $l_{тех1-2} = 0$ или $T_1^* = T_2^*$):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)}$$

б) уравнения, связывающие статические давления и плотности газа в двух сечениях струйки в случае энергетически изолированного ($q_{н 1-2} = 0$, $l_{тех 1-2} = 0$ или $T_1^* = T_2^*$) и изоэнтروпийного ($dS_{тр} = 0$ или $p_1^* = p_2^*$) течения:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_1)}$$

в) уравнение, связывающее изменение полного давления с изменением полной температуры и энтропии в общем случае (течение с обменом энергией с окружающей средой и потерями - $q_{н 1-2} \neq 0$, $l_{тех 1-2} \neq 0$ и $dS_{тр} > 0$):

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\left(\frac{S_2 - S_1}{R} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_1^*}{T_2^*}\right)}$$

Влияние числа Маха на сжимаемость газа

Здесь под сжимаемостью газа понимается зависимость его плотности (удельного объема) от числа Маха.

При изоэнтропийном разгоне газа от числа Маха $M = 0$ до некоторого значения $M > 0$ плотность будет меняться от ρ^* до ρ , т.е. плотность ρ^* соответствует неподвижному (несжимаемому) газу. В этом случае ρ^* и ρ связаны уравнением

$$\varepsilon(M) = \frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

из которого следует, что чем больше число Маха, тем больше различие между ρ^* и ρ , т.е. тем сильнее проявляется сжимаемость газа. В таблице даны значения отношения ρ^*/ρ в зависимости от числа Маха

M	0,3	0,5	1,0
$\varepsilon(M) = \frac{\rho^*}{\rho}$	1,05	1,113	1,57

Из таблицы следует, что примерно до $M = 0,3$ сжимаемостью газа можно пренебречь и рассчитывать газовые течения по формулам, полученным для несжимаемой жидкости.

Закон обращения воздействий

При взаимодействии системы с окружающей средой параметры состояния этой системы (p , T , ρ , W , p^* , T^* , ρ^*) будут изменяться за счет воздействия окружающей среды на

систему. Закон обращения воздействий позволяет определить какой знак должно иметь то или другое воздействие для ускорения или торможения дозвукового и сверхзвукового потоков.

Возможны следующие воздействия на систему со стороны окружающей среды:

1. геометрическое воздействие $dF \geq 0$ (расширение или сужение канала);
2. тепловое воздействие $dq_{\text{н}} \geq 0$ (подвод или отвод тепла);
3. механическое воздействие $dl_{\text{тех}} \geq 0$ (компрессор или турбина);
4. расходное воздействие $dG \geq 0$ (подвод или отвод массы газа);
5. воздействие трения. Проявляется в форме подвода к газу тепла $dq_{\text{вн}}$, выделяющегося в результате трения и равного работе трения $dl_{\text{тр}} > 0$.

Рассмотрим совместное решение уравнений неразрывности, энергии в тепловой форме, энергии в механической форме (уравнения Бернулли) и состояния, записанных в дифференциальном виде:

$$\begin{array}{c} \frac{dF}{F} + \frac{dW}{W} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dG}{G} \\ dq_{\text{н}} - dl_{\text{тех}} = c_p dT + WdW \\ -\frac{dp}{\rho} = WdW + dl_{\text{тех}} + dl_{\text{тр}} \\ \frac{dp}{\rho} = RdT + RT \frac{d\rho}{\rho} \end{array}$$

Подставляя в последнее уравнение $\frac{d\rho}{\rho}$, dT и $\frac{dp}{\rho}$, выраженные, соответственно, из первого,

второго и третьего уравнений, и учитывая, что $c_p = \frac{kR}{k-1}$, $a^2 = kRT$, $M = \frac{W}{a}$, получаем:

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = \frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \frac{k-1}{a^2} dq_{\text{н}} - \frac{1}{a^2} dl_{\text{тех}} - \frac{k}{a^2} dl_{\text{тр}}.$$

Это уравнение называется уравнением закона обращения воздействий.

Так как исходные уравнения энергии записаны для стационарного течения, то это уравнение справедливо только для случая расходного воздействия, при котором температура и скорость подведенного газа равны температуре и скорости газа в канале. В общем виде уравнение закона обращения воздействий записывается следующим образом:

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = \frac{dF}{F} - \left\{ \frac{T_{\text{м}}}{T} + kM^2 \left(1 - \frac{W_{\text{м}}}{W} \right) + \frac{k-1}{2} M^2 \left[1 - \left(\frac{W_{\text{возд}}}{W} \right)^2 \right] \right\} \frac{dG}{G} - \frac{k-1}{a^2} dq_{\text{н}} - \frac{1}{a^2} dl_{\text{тех}} - \frac{k}{a^2} dl_{\text{тр}}$$

В этом уравнении: W_m – проекция скорости $W_{\text{возд}}$ добавляемой массы на направление скорости основного потока; T_m – температура добавляемой массы.

В левой части этого уравнения находится дифференциал скорости dW , знак которого определяет поведение скорости: при $dW > 0$ поток ускоряется, а при $dW < 0$ – тормозится. В правой части уравнения находятся члены, описывающие воздействия на систему со стороны окружающей среды. Все воздействия за исключением воздействия трения могут менять знак на противоположный; воздействие трения всегда имеет положительный знак, являясь односторонним воздействием.

Знак скобки $(M^2 - 1)$ в левой части уравнения при переходе через скорость звука меняется на противоположный. Это означает, что для того, чтобы сохранить знак dW при переходе через скорость звука, необходимо знак воздействия сменить на противоположный.

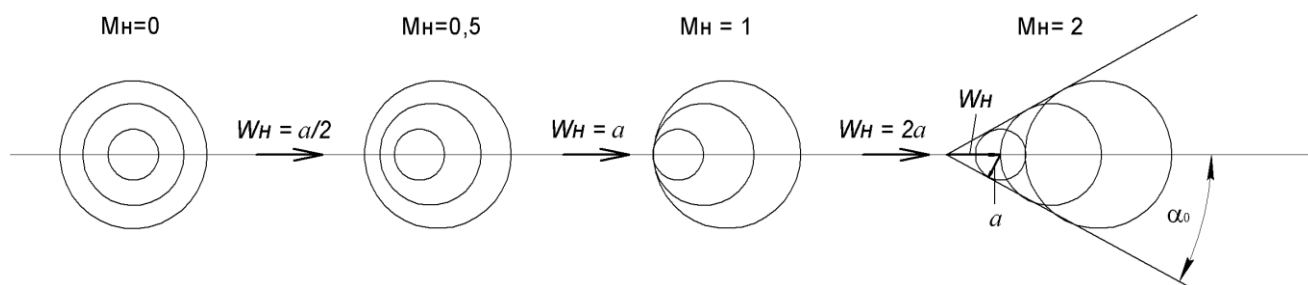
В соответствии с законом обращения воздействий:

1. Любое физическое воздействие одинакового знака противоположным образом влияет на дозвуковые и сверхзвуковые течения.
2. Переход через скорость звука с помощью одностороннего воздействия невозможен.
3. Переход через скорость звука возможен только в том случае, если в критическом сечении знак воздействия изменить на противоположный.

СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

Распространение слабых (звуковых) волн давления в газовых потоках

Изобразим распространение слабых волн давления в газовых потоках различной скорости от точечного источника в различные моменты времени с интервалом в 1 секунду. В неподвижном газе волны давления распространяются во все стороны симметрично, а в движущемся газе они будут сноситься вниз по потоку с его скоростью.

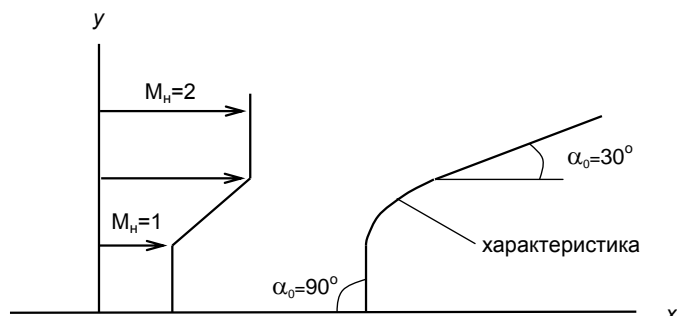


В сверхзвуковом потоке возмущения локализуются внутри конуса, который называется конусом Маха. Линии, образующие поверхность конуса Маха, называются характеристиками. Они составляют с вектором скорости угол α_0 .

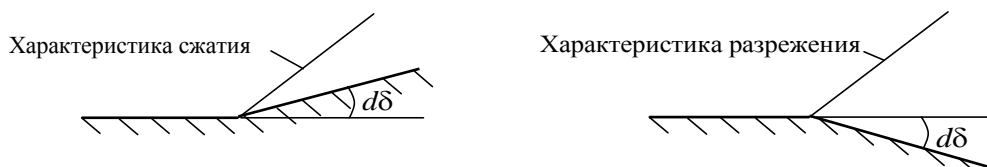
$$\sin \alpha_0 = \frac{a_H}{W_H} = \frac{1}{M_H}$$

Свойства характеристик

1. Характеристики существуют только в сверхзвуковых потоках.
2. В потоке с равномерным полем скоростей характеристики прямолинейны, а в потоке с неравномерным полем скоростей – криволинейны.



3. При обтекании сверхзвуковым потоком бесконечно малого внутреннего тупого угла $180^\circ - d\delta$, образованного двумя плоскостями, возникает характеристика сжатия, а при обтекании внешнего тупого угла $180^\circ + d\delta$ - характеристика разрежения.



Изменение параметров газа на характеристиках

1. В связи с тем, что толщина характеристики очень мала (порядка длины свободного пробега молекулы) течение газа, пересекающего характеристику, можно считать энергетически изолированным ($T^* = \text{const}$).

При пересечении одной характеристики потоком изменение его параметров очень незначительно и течение можно считать изоэнтروпийным, т.е. $p^* = \text{const}$.

Так как $T^* = \text{const}$ и $p^* = \text{const}$, то $\rho^* = \text{const}$ и $a_{кр} = \text{const}$

2. На характеристике сжатия давление, температура и плотность повышаются, а на характеристике разрежения – понижаются в соответствии с уравнением изоэнтропы

$$\frac{T_1}{T_n} = \left(\frac{p_1}{p_n} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_n} \right)^{k-1}$$

Индексы n и 1 соответствуют параметрам потока до и после характеристики.

3. Нормальная составляющая скорости W_n на характеристике сжатия уменьшается, а на характеристике разрежения – увеличивается. Это следует из уравнения количества движения в проекции на нормаль к характеристике.

4. Тангенциальная составляющая скорости при переходе через характеристику не изменяется

$$W_{1t} = W_{nt} = W_t.$$

Это равенство следует из уравнения количества движения в проекции на фронт характеристики.

Волны сжатия и разрежения

Волны сжатия могут быть сильными и слабыми.

Под сильной волной сжатия понимают волну сжатия, в которой изменение давления Δp сравнимо с самим давлением: $\Delta p/p \sim 1$. Такие волны сжатия называются скачками уплотнения (на них параметры газа меняются скачком на конечную величину).

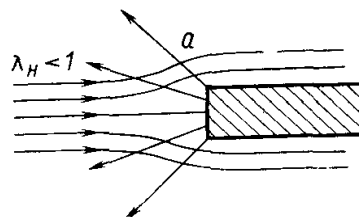
В слабой волне сжатия $\Delta p/p \ll 1$. К таким волнам относятся рассмотренные характеристики сжатия.

В отличие от скачков уплотнения в реальной энергетически изолированной системе скачки разрежения существовать не могут; возможны только характеристики разрежения.

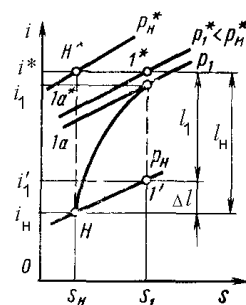
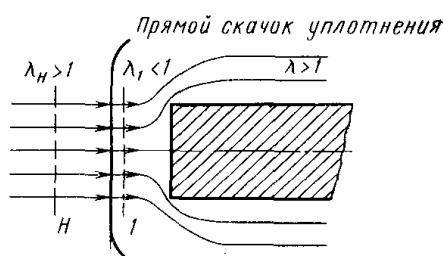
Скачки уплотнения

Скачки уплотнения представляют собой сильные волны сжатия малой толщины (порядка длины свободного пробега молекулы), в которых параметры газа меняются скачком на конечную величину.

Скачки уплотнения могут возникать и существовать только в сверхзвуковых потоках.



При обтекании тела дозвуковым потоком перед ним за счет торможения газа будет образовываться область повышенного давления. Так как скорость потока меньше скорости звука, а возмущения распространяются со скоростью звука, то информация об области повышенного давления будет передаваться вверх по потоку, и поток будет заранее перестраиваться, плавно обтекая тело.



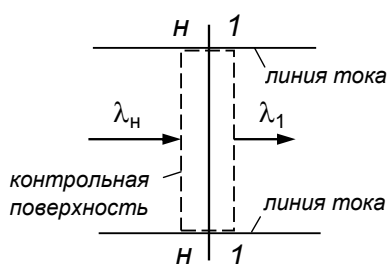
При обтекании затупленного тела сверхзвуковым потоком волны давления из зоны торможения газа не могут распространяться против потока ($W_n > a$) и сверхзвуковой поток будет как бы наталкиваться на тело, тормозясь на очень малой длине. На некотором расстоянии от тела возникает скачок уплотнения.

Прямые скачки уплотнения

Прямым называется скачок уплотнения, фронт которого перпендикулярен вектору скорости.

Получим формулы, связывающие параметры течения до и после скачка уплотнения, которые позволяют рассчитать все параметры газа за скачком уплотнения при известных параметрах перед скачком.

Рассмотрим прямой скачок уплотнения.



Выделим контрольную поверхность $H-1-1-H$ так, что поверхности $H-H$ и $1-1$, взятые до и после скачка уплотнения, расположены параллельно фронту скачка и сколь угодно близко друг к другу. В этом случае площади поверхностей $H-H$ и $1-1$ будут равны $F_H = F_1$, а площадь боковой поверхности $H-1$ близка к нулю: $F_{H-1} \cong 0$.

Для выделенного контрольного объема можно записать следующие уравнения, справедливые для любого одномерного течения:

1. уравнение неразрывности

$$m_1 \frac{p_1^* q(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_H \frac{p_H^* q(\lambda_H) F_H}{\sqrt{T_H^*}} \quad (1)$$

или

$$m_1 \frac{p_1 y(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_H \frac{p_H y(\lambda_H) F_H}{\sqrt{T_H^*}} \quad (2)$$

2. уравнение количества движения (в проекции на направление вектора скорости)

$$P = \Phi_1 - \Phi_H \quad (3)$$

3. уравнение энергии

$$q_{H-1} - l_{\text{тех } H-1} = i_1^* - i_H^* = c_p (T_1^* - T_H^*) \quad (4)$$

Кроме этого запишем выражение для коэффициента сохранения полного давления:

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_n^*} = e^{-\left(\frac{S_1 - S_n}{R} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_n^*}{T_1^*}\right)} \quad (5)$$

Так как боковая поверхность F_{n-1} близка к нулю, то можно считать, что для выбранной системы $q_{n-1} = 0$. Кроме этого, в данном случае $l_{\text{tex } n-1} = 0$. Т.е. выбранная система энергетически изолированная.

В этом случае из уравнения (4) следует, что

$$i_1^* = i_n^* \quad \text{или} \quad T_1^* = T_n^*,$$

а так как $a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$, то и

$$a_{\text{кр } 1} = a_{\text{кр } n}.$$

Рассмотрим уравнение (3).

Так как выделенная система не взаимодействует с твердыми поверхностями, то $P=0$ и из уравнения (3) следует, что $\Phi_1 = \Phi_n$ или с учетом ранее полученного выражения для полного импульса Φ через газодинамическую функцию $z(\lambda)$ имеем:

$$\frac{k+1}{2k} G_1 a_{\text{кр } 1} z(\lambda_1) = \frac{k+1}{2k} G_n a_{\text{кр } n} z(\lambda_n)$$

С учетом того, что $G_1 = G_n$, $a_{\text{кр } 1} = a_{\text{кр } n}$ и $k = \text{const}$ последнее уравнение принимает вид:

$$z(\lambda_1) = z(\lambda_n)$$

$$\text{или} \quad \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = \lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}.$$

Последнее уравнение является квадратным уравнением и имеет два решения:

$$\lambda_1 = \lambda_n$$

$$\text{и} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_n = 1.$$

Первое решение соответствует течению без изменения параметров и к скачкам уплотнения отношения не имеет.

Второе решение, т.е. соотношение между λ_1 и λ_n при прохождении газом фронта прямого скачка уплотнения, называется *основным кинематическим соотношением* для прямого скачка.

Учитывая что, $\lambda_1 = W_1/a_{\text{кр } 1}$, $\lambda_n = W_n/a_{\text{кр } n}$ и $a_{\text{кр } 1} = a_{\text{кр } n}$, можно получить основное кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения в виде:

$$W_1 \cdot W_n = a_{\text{кр}}^2.$$

Из последних уравнений следует, что за прямым скачком уплотнения скорость потока всегда дозвуковая.

В прямом скачке уплотнения имеют место необратимые процессы, сопровождающиеся ростом энтропии. В соответствии с формулой (5) записанной для скачка уплотнения ($T_1^* = T_H^*$), давление торможения на скачке уплотнения должно уменьшаться:

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_H^*} = e^{-\frac{s_1 - s_H}{R}}.$$

Количественную связь между p_1^* и p_H^* можно найти из уравнения (1) с учетом того, что на скачке уплотнения $m_1 = m_H$, $F_1 = F_H$, $T_1^* = T_H^*$:

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_H^*} = \frac{q(\lambda_H)}{q(\lambda_1)} = \frac{q(\lambda_H)}{q(1/\lambda_H)}.$$

Из уравнения (2) получаем связь между p_1 и p_H :

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{y(\lambda_H)}{y(\lambda_1)} = \frac{y(\lambda_H)}{y(1/\lambda_H)}.$$

Замена λ_H на M_H с использованием формулы

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (6)$$

позволяет получить следующую часто используемую формулу

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{2k}{k+1} M_H^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (7)$$

Связь между T_1 и T_H получается из равенства $T_1^* = T_H^*$:

$$\frac{T_1}{\tau(\lambda_1)} = \frac{T_H}{\tau(\lambda_H)}$$

Отношение статических температур за и перед скачком уплотнения равно:

$$\frac{T_1}{T_H} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_H)} = \frac{\tau(1/\lambda_H)}{\tau(\lambda_H)}.$$

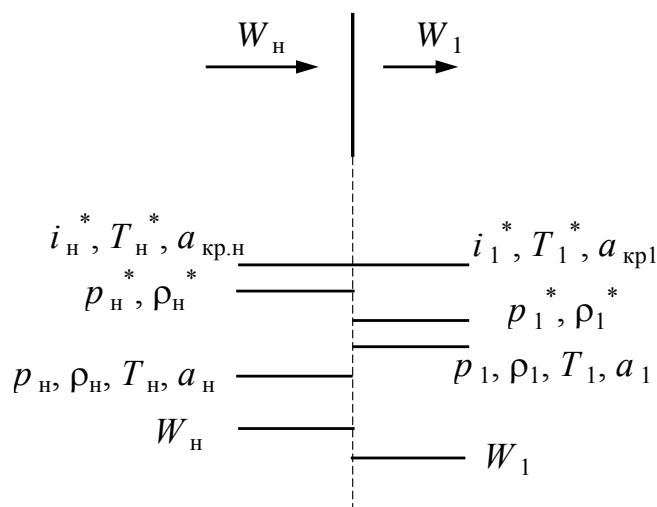
Получим формулу для расчета плотности газа за скачком уплотнения ρ_1 .

Из уравнения неразрывности при $F_1 = F_H$ следует:

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{W_H}{W_1} = \frac{W_H W_H}{W_1 W_H} = \frac{W_H^2}{a_{кр}^2} = \lambda_H^2. \quad (8)$$

При выводе последней формулы использовалось основное кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения $W_1 \cdot W_H = a_{кр}^2$.

Используя полученные формулы, можно проанализировать изменение параметров газа в прямом скачке уплотнения. Результаты анализа приведены на рисунке.



Подставляя (6) в (8), с учетом (7) получаем уравнение ударной адиабаты (адиабаты Гюгонио) или *основное динамическое соотношение* ударной волны

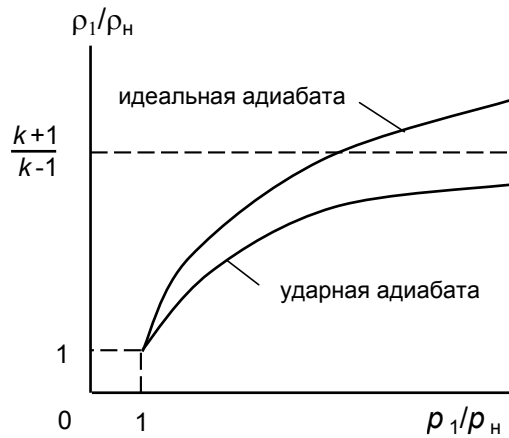
$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_H}{p_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_H}{p_1}} \quad (9)$$

Уравнение ударной адиабаты устанавливает связь между плотностью и давлением до и после скачка уплотнения.

Рассмотрим отличие сжатия газа в ударной адиабате от сжатия в идеальном адиабатическом (изоэнтропийном) процессе, для которого справедливо равенство

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \left(\frac{p_1}{p_H} \right)^{\frac{1}{k}}$$

На рисунке изображена зависимость $\frac{\rho_1}{\rho_H} = f\left(\frac{p_1}{p_H}\right)$ для ударной адиабаты и изоэнтропийного процесса сжатия.



В случае идеального адиабатического процесса увеличение плотности с ростом давления является неограниченным ($\rho_1 \rightarrow \infty$).

Особенностью ударной адиабаты является то, что при неограниченном возрастании давления в скачке уплотнения ($p_1 \rightarrow \infty$) увеличение плотности имеет определенный предел, который как это видно из уравнения (9), равен

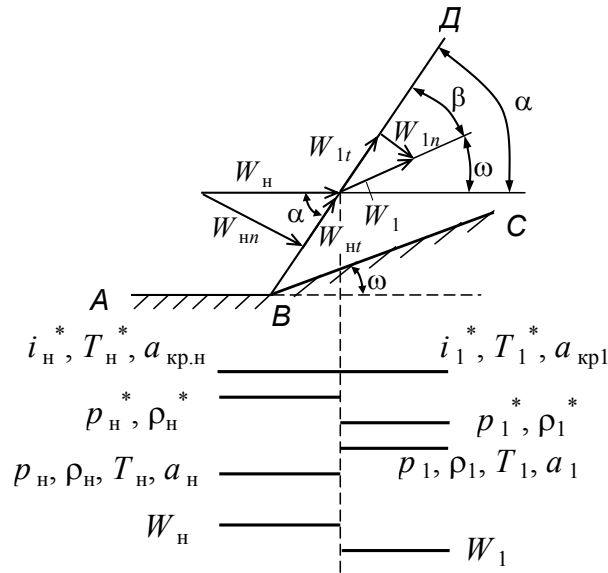
$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_n} \right)_{\max} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Это объясняется большим разогревом газа за счет потерь при ударном сжатии газа по сравнению с разогревом при изэнтропийном сжатии, в котором эти потери отсутствуют.

Косые скачки уплотнения

Косыми скачками уплотнения называются скачки, фронт которых составляет с вектором скорости сверхзвукового набегающего потока угол α , отличный от прямого. Этот угол может меняться от угла характеристики α_0 до 90° .

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком со скоростью W_n внутреннего тупого угла $(180^\circ - \omega)$, образованного двумя полубесконечными пластинами AB и BC , расположенными под углом ω друг к другу. При этом возникает косой скачок уплотнения BD . Поток до скачка BD движется параллельно плоскости AB со скоростью \vec{W}_n , на скачке поворачивает на угол ω и движется после скачка со скоростью \vec{W}_1 параллельно плоскости BC .



Параметры потока до скачка уплотнения обозначим индексом n , а за скачком – индексом 1 . До скачка уплотнения вектор скорости \vec{W}_n составляет с фронтом скачка угол α , а за скачком вектор скорости \vec{W}_1 составляет с фронтом скачка угол β . Из рисунка следует, что

$$\alpha = \omega + \beta \quad (10)$$

Разложим векторы скорости газа до скачка \vec{W}_n и за скачком \vec{W}_1 на составляющие, нормальные и тангенциальные к фронту скачка: W_{nn}, W_{nt} и W_{1n}, W_{1t} .

Так же как и на характеристиках сжатия $W_{1n} < W_{nn}$ и $W_{1t} = W_{nt}$. В связи с этим косой скачок уплотнения можно представить как прямой скачок для нормальной составляющей скорости W_n , сносимый вдоль фронта косоугольного скачка со скоростью W_t . Поэтому косые скачки уплотнения можно рассчитывать по формулам расчета прямых скачков уплотнения, заменив в них все параметры, включающие скорости, на параметры, связанные с нормальными составляющими скоростей.

Течение в косом скачке уплотнения, также как и течение в прямом скачке уплотнения является энергетически изолированным ($l_{тех} = 0$ и $q_n = 0$) и поэтому из уравнения энергии в тепловой форме, записанного для элементарной струйки, пересекающей скачок,

$$q_n - l_{тех} = i_1^* - i_n^* = c_p(T_1^* - T_n^*)$$

следует

$$i_1^* = i_n^*, T_1^* = T_n^*, a_{кр,1} = a_{кр,n}.$$

Т.е. полная энергия газа, равная полной энтальпии (энтальпии торможения) газа, на косом скачке уплотнения не изменяется.

Наряду с температурой торможения T^* , критической скоростью звука $a_{кр}$ и приведенной скоростью λ в теории косых скачков уплотнения используются:

- температура частичного торможения T_n ;
- условная критическая скорость звука $a_{крn}$;
- приведенная скорость λ_n .

Температура частичного торможения - температура, которую принимает газ при энергетически изолированном погашении до нуля только нормальной составляющей скорости. Эта температура рассчитывается по формуле:

$$T_n^* = T + W_n^2 / 2c_p.$$

Условная критическая скорость звука – критическая скорость звука, рассчитанная по формуле

$$a_{крn} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_n^*}$$

Приведенная скорость λ_n – отношение нормальной составляющей скорости к условной критической скорости звука:

$$\lambda_n = W_n / a_{крn}.$$

Приведенные скорости λ_{nn} и λ_{1n} не являются нормальными составляющими приведенных скоростей λ_n и λ_1 . Покажем это на примере приведенной скорости λ_{nn} . Из треугольника скоростей следует, что $W_{nn} = W_n \cdot \sin \alpha$. Для того, чтобы перейти к приведенным скоростям, необходимо левую часть разделить на $a_{кр,nn}$, а правую - на $a_{кр,n}$. Так как $a_{кр,nn} \neq a_{кр,n}$, то $\lambda_{nn} \neq \lambda_n \cdot \sin \alpha$. Таким же образом можно доказать, что $\lambda_{1n} \neq \lambda_1 \cdot \sin \beta$.

Можно показать, что температура частичного торможения T_n^* , также как и температура торможения T^* , на косом скачке остается постоянной.

По определению

$$T_n^* = T + W_n^2 / 2c_p.$$

Так как $W^2 = W_n^2 + W_t^2$, то

$$T_n^* = T + \frac{W^2}{2c_p} - \frac{W_t^2}{2c_p} = T^* - \frac{W_t^2}{2c_p}$$

или для сечений $H-H$ и $I-I$ элементарной струйки, пересекающей скачок:

$$T_{nn}^* = T_n^* - \frac{W_{nt}^2}{2c_p}, \quad T_{1n}^* = T_1^* - \frac{W_{1t}^2}{2c_p}$$

На косом скачке уплотнения $T_1^* = T_n^*$ и $W_{1t} = W_{nt}$, следовательно $T_{1n}^* = T_{nn}^*$. Из последнего равенства следует, что $a_{кр1n} = a_{кр,nn}$.

В отличие от приведенной скорости λ_n число Маха M_n является нормальной составляющей M как перед, так и за скачком уплотнения

$$M_{Hn} = \frac{W_{Hn}}{a_H} = \frac{W_H \sin \alpha}{a_H} = M_H \sin \alpha \quad (11)$$

$$M_{1n} = \frac{W_{1n}}{a_1} = \frac{W_1 \sin \beta}{a_1} = M_1 \sin \beta.$$

Так как косые скачки уплотнения являются прямыми скачками уплотнения для нормальных составляющих вектора скорости, то эти скачки можно рассчитывать по формулам, полученным для прямых скачков уплотнения с заменой λ_H и λ_1 на λ_{Hn} и λ_{1n} . Выполнив эту замену, получим следующие формулы, связывающие параметры течения за скачком с параметрами течения перед скачком:

- основное кинематическое соотношение

$$\lambda_{1n} \lambda_{Hn} = 1 \quad \text{или} \quad W_{1n} W_{Hn} = a_{крn}^2$$

- уменьшение полного давления газа

$$\sigma_{кc} = \frac{p_1^*}{p_H^*} = \frac{q(\lambda_{Hn})}{q(\lambda_{1n})} = \frac{q(\lambda_{Hn})}{q(1/\lambda_{Hn})}$$

- увеличение плотности газа

$$\rho_1 / \rho_H = \lambda_{Hn}^2$$

- увеличение статического давления газа

$$\frac{p_1}{p_H} = \frac{y(\lambda_{Hn})}{y(\lambda_{1n})} = \frac{y(\lambda_{Hn})}{y(1/\lambda_{Hn})} = \frac{2k}{k+1} M_{Hn}^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2k}{k+1} M_H^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1}$$

- увеличение статической температуры

$$\frac{T_1}{T_H} = \frac{\tau(\lambda_{1n})}{\tau(\lambda_{Hn})} = \frac{\tau(1/\lambda_{Hn})}{\tau(\lambda_{Hn})}$$

Уравнение ударной адиабаты, состоящее из скалярных параметров, сохраняет ту же форму, что и для прямого скачка

$$\frac{\rho_1}{\rho_H} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_H}{p_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_H}{p_1}}$$

Часто при решении задач необходимо знать величину приведенной скорости за косым скачком уплотнения λ_1 . Связь между λ_1 и λ_H можно найти из треугольников скоростей за и перед скачком уплотнения:

$$W_{1t} = W_1 \cos \beta = W_{Ht} = W_H \cos \alpha$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \lambda_H \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

Из этих треугольников скоростей также можно получить уравнение, связывающее углы α , β и приведенную скорость $\lambda_{\text{нп}}$. Разделив почленно $W_{\text{нп}} = W_{\text{нп}} \text{tg} \alpha$ на $W_{1\text{н}} = W_{1\text{н}} \text{tg} \beta$ с учетом $W_{\text{нп}} = W_{1\text{н}}$, имеем:

$$\text{tg} \beta = \frac{1}{\lambda_{\text{нп}}^2} \text{tg} \alpha \quad (12)$$

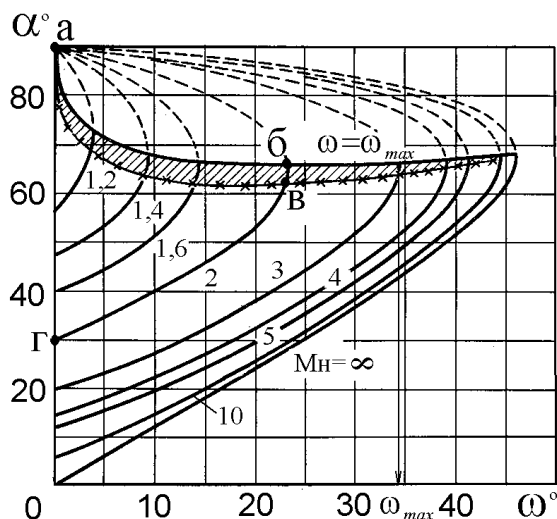
Приведенные формулы позволяют проводить как расчет, так и анализ изменения параметров газа при пересечении им косоугольного скачка уплотнения. Качественное изменение параметров газа при пересечении им косоугольного скачка уплотнения показано на рисунке, приведенном выше.

На практике расчет косоугольного скачка уплотнения сводится к определению параметров газа за скачком уплотнения по заданным значениям угла ω , числа Маха $M_{\text{н}}$ и известным параметрам газа перед скачком уплотнения с использованием приведенных формул.

Для того, чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо знать приведенную скорость $\lambda_{\text{нп}}$, которую можно определить по нормальной составляющей числа Маха перед скачком уплотнения $M_{\text{нп}} = M_{\text{н}} \sin \alpha$. Связь между $\lambda_{\text{нп}}$ и $M_{\text{нп}}$ устанавливается формулой

$$\lambda_{\text{нп}}^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M_{\text{нп}}^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_{\text{нп}}^2} \quad (13)$$

При проведении расчетов значение $\lambda_{\text{нп}}$ удобнее находить по значению $M_{\text{нп}}$ из таблиц газодинамических функций, не обращая внимания на индекс n . Заменяя $\lambda_{\text{нп}}$ на $M_{\text{нп}}$, мы заменили одно неизвестное на другое, так как для вычисления $M_{\text{нп}}$ необходимо знать угол α . Этот угол можно найти по графикам $\alpha = f(M_{\text{н}}, \omega)$, построенным в результате решения системы уравнений (10)-(13). Зависимость $\alpha = f(M_{\text{н}}, \omega)$ графически изображается следующим образом.

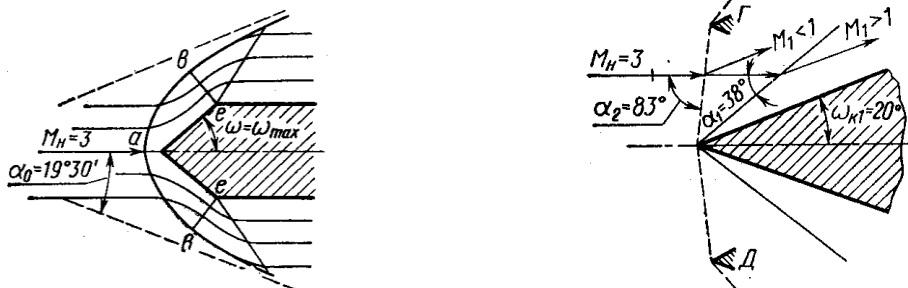


Точки пересечения кривых $M_H = \text{const}$ с прямой $\omega = 0$ (точки Γ) соответствуют характеристикам сжатия, для которых $\alpha = \alpha_0 = \arcsin(1/M_H)$.

Участки кривых Γ -в соответствуют косым скачкам уплотнения, за которыми поток остается сверхзвуковым ($M_1 > 1$). Такие скачки называются слабыми косыми скачками.

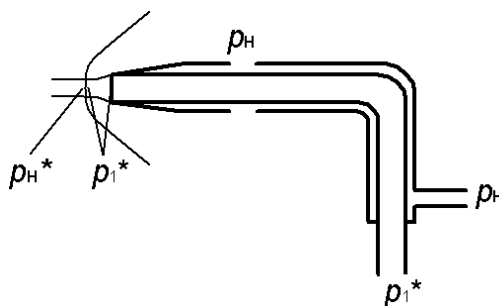
Участки кривых в-а соответствуют так называемым сильным косым скачкам, за которыми скорость потока становится дозвуковой ($M_1 < 1$). Опыт показывает, что в обычных условиях сильные косые скачки, соответствующие участкам кривых б-а, не реализуются, так как они являются неустойчивыми.

Из рисунка видно, что прямая $\omega = \text{const}$ пересекает кривые $M_H = \text{const}$ в двух точках, т.е. одному значению ω при заданном M_H могут соответствовать два значения угла α . Из приведенного выше следует, что из этих углов α необходимо выбирать меньшее значение, при котором реализуется устойчивый косой скачок уплотнения. Кроме этого из рисунка следует, что для заданного значения числа M_H существует максимальный угол отклонения потока в косом скачке уплотнения ω_{max} . Если $\omega > \omega_{\text{max}}$, то поворот потока в косом скачке уплотнения не возможен и перед телом возникает отошедшая (отсоединенная) ударная волна, в которой угол α меняется от 90° до α_0 .



Измерение скорости сверхзвукового потока

Скорость сверхзвукового потока можно измерить с помощью трубки Пито-Прандтля. Особенностью измерения скорости сверхзвукового потока с использованием этой трубки является то, что перед ней возникает отошедшая ударная волна.



С достаточной точностью можно считать, что струйка газа, попадающая в отверстие трубки, тормозится в прямом скачке уплотнения, и далее за скачком происходит энергетически изолированное изэнтропийное торможение дозвукового потока до нулевой скорости на носике трубки.

При этом манометр, подсоединенный к центральной трубке, покажет значение полного давления за прямым скачком уплотнения $p_1^* \left[\frac{p_H^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_H)} = \frac{q(1/\lambda_H)}{q(\lambda_H)} \right]$.

Статическое давление измеряется на поверхности трубки на расстоянии, превышающем пять ее диаметров, от переднего края. Как показывает опыт, в этом случае измеренное давление равно статическому давлению в потоке $p_H \left[p_H = p_H^* \pi(\lambda_H) \right]$.

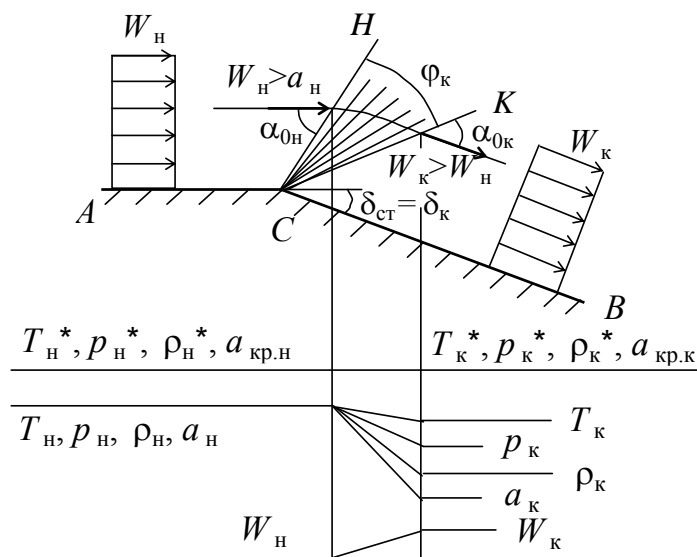
Измеренные давления p_1^* и p_H можно связать с λ_H или M_H :

$$\frac{p_H}{p_1^*} = \frac{q(1/\lambda_H)\pi(\lambda_H)}{q(\lambda_H)} = \left[\frac{2}{(k+1)M_H^2} \right]^{k-1} \left(\frac{2k}{k+1} M_H^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Эта формула называется формулой Рэля. Для удобства расчетов зависимость $M=f(p_H/p_1^*)$ представляется в виде таблиц для заданного значения показателя адиабаты k .

Ускорение сверхзвукового потока при обтекании внешнего тупого угла (течение Прандтля-Майера)

Рассмотрим обтекание сверхзвуковым потоком поверхности, образованной двумя полубесконечными пластинами, расположенными под углом δ_K друг к другу, т.е. образующими внешний тупой угол ACB , равный $(180^\circ + \delta_K)$.



Будем считать, что вдоль адиабатической стенки AC течет сверхзвуковой ($\lambda_n > 1$) равномерный параллельный поток идеального газа. В этом случае течение вдоль стенки AC будет энергетически изолированным ($T^* = \text{const}$) и изоэнтропийным ($p^* = \text{const}$).

Вершина угла C является источником слабых возмущений, которые в виде бесчисленного множества прямолинейных характеристик разрежения располагаются в пределах угла HCK . Совокупность этих характеристик называется центрированной волной разрежения, так как все образующие ее характеристики исходят из одной точки. Первая характеристика CH располагается под углом $\alpha_{0н} = \arcsin(1/M_n)$ к вектору скорости невозмущенного потока $\vec{W}_н$, а последняя CK – под углом $\alpha_{0к} = \arcsin(1/M_k)$ к вектору скорости после поворота потока $\vec{W}_к$.

На каждой характеристике разрежения нормальная составляющая скорости W_n увеличивается, а тангенциальная составляющая W_t остается неизменной. Бесконечно малое увеличение модуля вектора скорости газа на характеристике разрежения (за счет увеличения W_n) сопровождается бесконечно малым уменьшением давления, плотности, температуры и скорости звука при постоянных полной температуре и полном давлении. Течение газа в пределах угла HCK является результатом пересечения газом бесконечного числа характеристик разрежения. Поэтому вдоль линии тока газа, пересекающего пучок характеристик (волну разрежения), его полная температура и полное давление остаются постоянными ($T^* = \text{const}$, $p^* = \text{const}$), а скорость и статические параметры плавно изменяются как это показано на рисунке. Так как параметры потока вдоль каждой характеристики не меняются, то поток газа при его течении в пределах угла HCK будет равномерным и параллельным.

После поворота поток движется вдоль адиабатической стенки CB . Этот поток является также равномерным и параллельным, в котором все параметры газа, в том числе полная температура и полное давление, остаются постоянными.

Таким образом, во всей области течения – вдоль стенки AC , в пределах угла HCK и вдоль стенки CB – течение равномерное и параллельное с постоянными параметрами торможения ($T^* = \text{const}$, $p^* = \text{const}$, $\rho^* = \text{const}$).

Так как течение Прандтля-Майера представляет собой течение вокруг вершины угла (точки C) и вдоль характеристик, исходящих из этой вершины, параметры потока остаются неизменными, то все формулы для расчета течения Прандтля-Майера выводятся в полярных координатах (r, φ) , где r – радиус-вектор точки, φ – угол, образованный этим радиусом-вектором с некоторым лучом, соответствующим началу отсчета угла φ .

В связи с тем, что параметры торможения газа в течении Прандтля-Майера не меняются, то статические параметры газа и его скорость в любой точке линии тока могут быть рассчитаны по формулам

$$T = T^* \tau(\lambda), \quad p = p^* \pi(\lambda), \quad \rho = \rho^* \varepsilon(\lambda), \quad W = a_{кр} \lambda.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, надо знать значение приведенной скорости λ в каждой точке линии тока, пересекающей волну разрежения, т.е. необходимо иметь зависимость $\lambda = \lambda(\varphi)$. Формула, связывающая значение приведенной скорости λ с полярным углом φ имеет вид:

$$\lambda^2 = \frac{W^2}{a_{кр}^2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left[\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} (\varphi + C) \right]$$

в которой C – постоянная интегрирования.

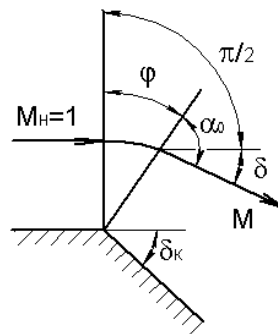
Для расчета приведенной скорости λ необходимо определить значение константы C или, что то же самое, найти начало отсчета угла φ .

Рассмотрим сначала частный случай течения при $\lambda_n = M_n = 1$.

При $M_n = 1$ $\alpha_{0n} = \arcsin(1/M_n) = 90^\circ$, т.е. в этом случае первая характеристика перпендикулярна вектору скорости невозмущенного потока, и ее удобно принять за начало отсчета угла φ , т.е. для нее $\varphi = 0$. Подстановка $\lambda_n = 1$ и $\varphi = 0$ в формулу для λ дает $C = 0$ и эта формула принимает вид

$$\lambda^2 = \frac{W^2}{a_{кр}^2} = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right)$$

Связь между углами δ , φ и α_0 получается из рассмотрения рисунка.



$$\frac{\pi}{2} + \delta = \varphi + \alpha_0; \quad \alpha_0 = \arcsin(1/M).$$

В течении Прандтля-Майера газ ускоряется, но его скорость не может превышать максимальной скорости

$$W_{\max} = \sqrt{2i^*} \quad \text{или} \quad \lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}.$$

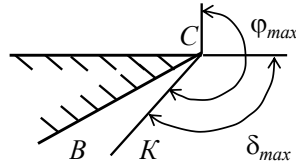
Дальнейшее ускорение и поворот потока оказываются невозможными. Отсюда следует, что должны существовать максимальные углы φ_{\max} и δ_{\max} . Значение φ_{\max} можно получить из формулы $\lambda = \lambda(\varphi)$, если в нее подставить λ_{\max} :

$$\varphi_{\max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Значение δ_{\max} получается в результате подстановки φ_{\max} в формулу, связывающую углы δ , φ и α_0 :

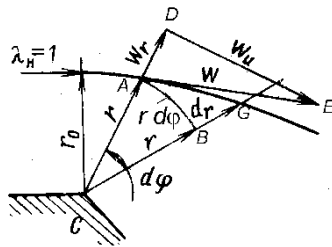
$$\delta_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right)$$

Если $\delta_k > \delta_{\max}$, то поток поворачивает только на угол δ_{\max} и течет не по стенке CB , а по лучу CK , соответствующему δ_{\max} . Между этой характеристикой CK и стенкой CB образуется пространство BCK , в котором отсутствуют молекулы газа исходного потока. Это явление называется отрывом сверхзвукового потока.



Уравнение линий тока течения Прандтля-Майера

Рассмотрим рисунок.



На этом рисунке изображены две характеристики CA и CG , угол между которыми $d\varphi$. Из точки A , являющейся пересечением линии тока AG с характеристикой CA , проведена дуга окружности AB . Отрезок BG равен dr . Вектор скорости в точке A разложен на две составляющие W_r и W_u . Этот вектор направлен по касательной к линии тока AG .

Из подобия треугольника скоростей ADE и криволинейного прямоугольного треугольника ABG следует

$$\frac{BG}{AB} = \frac{AD}{DE} \quad \text{или} \quad \frac{dr}{r \cdot d\varphi} = \frac{W_r}{W_u}.$$

Это дифференциальное уравнение линий тока в полярных координатах.

Если в это уравнение подставить выражения для W_r и W_u и проинтегрировать его, то получится уравнение линии тока в полярных координатах:

$$r = r_0 \left[\cos \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}},$$

В этом уравнении r_0 – длина радиуса-вектора линии тока при $\varphi=0$, т.е. в невозмущенном потоке.

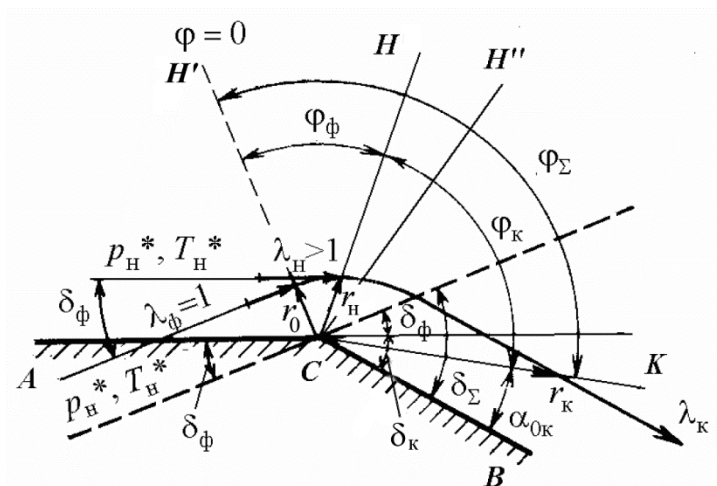
Для удобства расчета течения Прандтля-Майера на основе полученных формул составлены таблицы, аналогичные таблицам газодинамических функций. Для $k = 1,4$ таблица имеет вид:

δ°	φ°	λ	M	α°	r/r_0
0	0	1	1	90	1
...
130	220	2,45	∞	0	∞

В зависимости от заданного параметра решение находится в соответствующей строке таблицы. Последняя строка соответствует предельным значениям $\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ и

$$\delta_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right).$$

Расчет течения Прандтля-Майера при $\lambda_n > 1$



Расчет течения Прандтля-Майера при $\lambda_n > 1$ проводится с использованием формул, полученных для случая $\lambda_n = 1$. Правомерность этого обусловлена тем, что вдоль каждой

характеристики параметры потока остаются постоянными, т.е. на любой характеристике поток является равномерным и параллельным. И, следовательно, для поворота потока, происходящего правее данной характеристики (например CH'') не имеет значение, начался поворот потока сразу при значении $\lambda_n > 1$ (на характеристике CH) или же до этого поток разгонялся от $\lambda_\phi = 1$ до $\lambda_n > 1$ при повороте на угол δ_ϕ . Поэтому при расчете течения Прандтля-Майера при $\lambda_n > 1$ принимают, что данный сверхзвуковой поток получен в результате предварительного ускорения фиктивного звукового потока $\lambda_\phi=1$, $p_\phi^*=p_n^*$, $T_\phi^* = T_n^*$ при его повороте на угол δ_ϕ и при повороте характеристики CH' на угол ϕ_ϕ . Течение между характеристиками CH и CK будет одинаково как для заданного потока $\lambda_n > 1$, так и для фиктивного $\lambda_\phi = 1$.

При расчете течения Прандтля-Майера в случае $\lambda_n > 1$ используются формулы, полученные для случая $\lambda_n = 1$, в которые вместо углов ϕ и δ подставляются суммарные углы $\phi_\Sigma = \phi + \phi_\phi$ и $\delta_\Sigma = \delta + \delta_\phi$. С помощью таблиц расчет течения Прандтля-Майера проводится в следующей последовательности:

1. в столбце для λ находится заданная величина $\lambda_n > 1$ и в горизонтальной строке находятся соответствующие ей δ_ϕ и ϕ_ϕ ;
2. определяются суммарные углы $\delta_\Sigma = \delta + \delta_\phi$ или $\phi_\Sigma = \phi + \phi_\phi$ в зависимости от того, что известно δ_k или ϕ_k ;
3. в соответствующем столбце таблицы находятся δ_Σ или ϕ_Σ . Горизонтальная строка, содержащая эти значения, дает решение задачи.

δ°	ϕ°	λ	M	α°	r/r_0
0	0	1	1	90	1
...
δ_ϕ	ϕ_ϕ	λ_n	M_n	α_{0n}	r_n/r_0
...
δ_Σ	ϕ_Σ	λ_k	M_k	α_{0k}	r_k/r_0
...

$\delta_\Sigma = \delta + \delta_\phi$ ←
 $(\phi_\Sigma = \phi + \phi_\phi)$ →

Полученные ранее формулы для максимальных углов поворота потока для случая $\lambda_n = 1$, справедливы при $\lambda_n > 1$ лишь для суммарных углов

$$\phi_{\Sigma \max} = \phi_\phi + \phi_{\text{пред}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}, \quad \delta_{\Sigma \max} = \delta_\phi + \delta_{\text{пред}} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right)$$

Максимальные углы поворота сверхзвукового потока и характеристики от их первоначального направления называются предельными; их величина уменьшается с увеличением λ_n : $\delta_{\text{пред}} = \delta_{\Sigma\text{max}} - \delta_{\text{ф}}$; $\varphi_{\text{пред}} = \varphi_{\Sigma\text{max}} - \varphi_{\text{ф}}$.

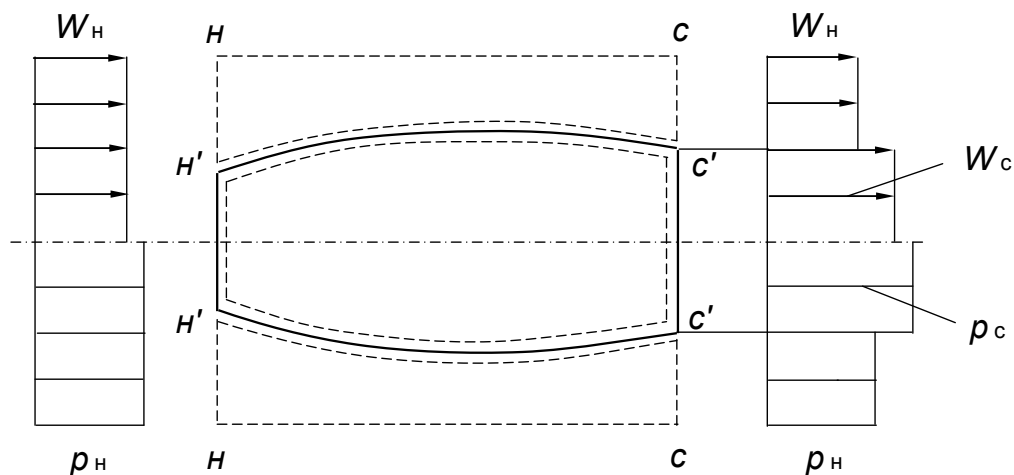
РЕАКТИВНАЯ СИЛА (ТЯГА) ДВИГАТЕЛЯ

Полет летательного аппарата происходит под действием реактивной силы или, как ее обычно называют, реактивной тяги.

Реактивная тяга (тяга) – результирующая всех газодинамических сил (давления и трения), приложенных к внутренней и наружной поверхностям двигателя в предположении, что внешнее обтекание двигателя идеальное.

Определение силы тяги суммированием сил давления и трения по поверхности двигателя неосуществимо из-за сложной формы поверхности и трудностей расчета распределения сил по ней. Существует более простой способ вычисления силы тяги, в соответствии с которым тяга находится из уравнения количества движения по разности полных импульсов газа на выходе и входе в двигатель.

Вывод формулы тяги значительно упрощается, если обратить движение: остановим двигатель и направим на него окружающую среду со скоростью полета W_n и параметрами p_n , ρ_n , T_n .



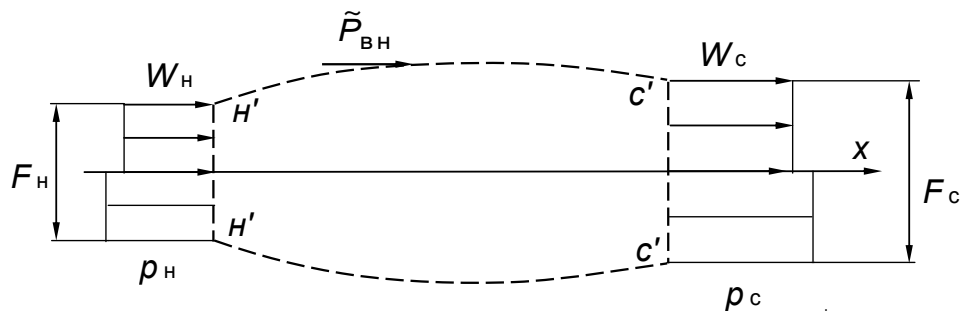
При выводе формулы тяги будем рассматривать идеальное обтекание двигателя, при котором двигатель не вносит возмущений в поток. Это означает, что перед двигателем и за ним, исключая площадь сопла, поля всех параметров такие же как на бесконечном удалении от двигателя. В общем случае давление на срезе сопла p_c не равно давлению окружающей среды p_n .

Найдем силы взаимодействия двигателя с газом, протекающим через двигатель, и газом, обтекающим его.

Силы, действующие на двигатель со стороны газа, протекающего через двигатель, приложены ко всем элементам проточной части двигателя, но через элементы крепления передаются на его корпус. Поэтому будем считать, что результирующая всех сил, действующих на элементы проточной части двигателя, приложена к его стенке.

Вследствие симметрии двигателя радиальные составляющие результирующих сил, действующих со стороны газа на стенки двигателя, как с внутренней, так и с внешней стороны, равны нулю и, следовательно, результирующие силы на этих поверхностях будут направлены вдоль оси двигателя.

Рассмотрим течение газа внутри двигателя. Выделим систему, ограниченную контрольной поверхностью $H'-C'-C'-H'$. Выберем ось x , совпадающую с осью симметрии двигателя и направленную вдоль течения.



Для выбранной системы запишем уравнение количества движения в проекции на ось x , обозначив силу, действующую со стороны двигателя на газ $\tilde{P}_{ВН}$.

$$\tilde{P}_{ВН} + p_H F_H - p_C F_C = G_T W_C - G_B W_H$$

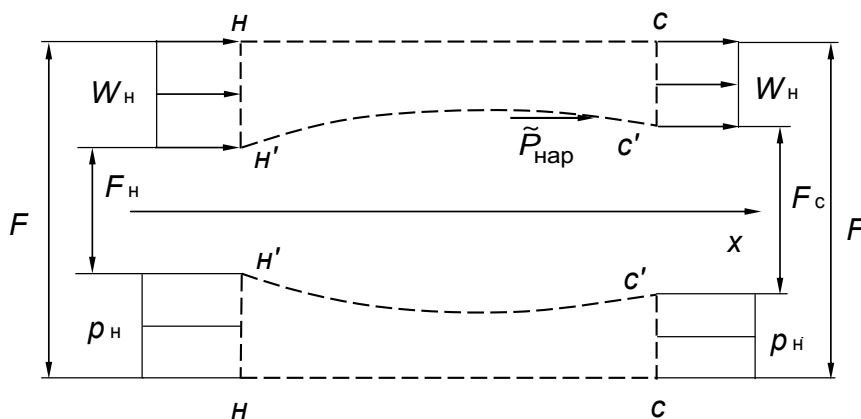
$$G_T = G_B + G_T$$

G_B и G_T – расходы воздуха и топлива.

Из этого уравнения

$$\tilde{P}_{ВН} = p_C F_C - p_H F_H + G_T W_C - G_B W_H$$

Рассмотрим внешнее обтекание двигателя.



Цилиндрическую поверхность $H-C$ выберем таким образом, чтобы она лежала вне возмущений, вносимых двигателем в поток. При этом условия силы на поверхности $H-C$ будут отсутствовать.

Проекцию силы на ось x , действующую на газ со стороны двигателя вдоль поверхности $H'-C'$, обозначим $\tilde{P}_{\text{нар}}$. Эта сила может быть найдена из уравнения количества движения в проекции на ось x , записанного для внешнего контрольного объема $H'-H-C-C'$:

$$\tilde{P}_{\text{нар}} + p_{\text{н}}(F - F_{\text{н}}) - p_{\text{н}}(F - F_{\text{с}}) = G_{\text{нар}}(W_{\text{н}} - W_{\text{н}})$$

Отсюда

$$\tilde{P}_{\text{нар}} = p_{\text{н}}(F_{\text{н}} - F_{\text{с}}).$$

Сила, с которой двигатель действует на газ, текущий внутри и снаружи двигателя, равна

$$\tilde{P} = G_{\text{в}}(W_{\text{с}} - W_{\text{н}}) + G_{\text{т}}W_{\text{с}} + F_{\text{с}}(p_{\text{с}} - p_{\text{н}}).$$

Направление этой силы совпадает с направлением течения газа.

Сила, с которой газ действует на двигатель P , т.е. реактивная тяга, равна по величине, но противоположна по направлению силе \tilde{P} :

$$P = -\tilde{P}.$$

Знак " - " указывает на то, что эта сила направлена против течения газа, т.е. в направлении полета. Это направление принимается за положительное направление реактивной силы, и поэтому окончательно имеем

$$P = G_{\text{в}}(W_{\text{с}} - W_{\text{н}}) + G_{\text{т}}W_{\text{с}} + F_{\text{с}}(p_{\text{с}} - p_{\text{н}}).$$

Формулы для расчета силы тяги для частных случаев

1. Сила тяги ВРД при расчетном режиме работы сопла ($p_{\text{с}} = p_{\text{н}}$)

$$P = G_{\text{в}}(W_{\text{с}} - W_{\text{н}}) + G_{\text{т}}W_{\text{с}}$$

2. Сила тяги ВРД, работающего на старте ($W_{\text{н}} = 0$)

$$P = (G_{\text{в}} + G_{\text{т}})W_{\text{с}} + F_{\text{с}}(p_{\text{с}} - p_{\text{н}})$$

3. Сила тяги ВРД при пренебрежении расходом топлива ($G_{\text{т}} < 0,06 \cdot G_{\text{в}}$)

$$P = G_{\text{в}}(W_{\text{с}} - W_{\text{н}}) + F_{\text{с}}(p_{\text{с}} - p_{\text{н}})$$

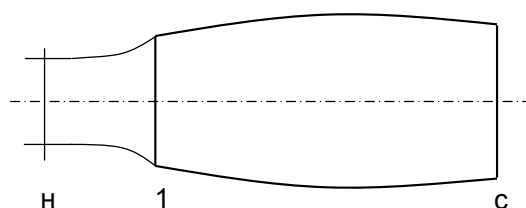
4. Сила тяги ракетного двигателя

$$P = G_{\text{т}}W_{\text{с}} + F_{\text{с}}(p_{\text{с}} - p_{\text{н}})$$

Эффективная сила тяги

Приведенные выше формулы для расчета силы тяги дают возможность определить реактивную силу двигателя без учета внешнего сопротивления, которое он создает при установке на летательном аппарате. Так как некоторая доля тяги идет на преодоление сопротивления самой двигательной установки, то вводится понятие эффективной тяги. *Эффективной тягой* называется часть силы тяги, идущая на совершение полезной работы по преодолению лобового сопротивления и инерции самого летательного аппарата и равная разности между силой тяги и суммарным внешним сопротивлением двигательной установки:
 $P_{\text{эф}} = P - \Sigma X_{\text{нар}}$.

$$P_{\text{эф}} = P - \left[\int_{F_{\text{н-1}}} (p - p_{\text{н}}) dF \right]_x - \left[\int_{F_{\text{1-с}}} (p - p_{\text{н}}) dF \right]_x - X_{\text{тр}}$$



В последнем уравнении:

$\left[\int_{F_{\text{н-1}}} (p - p_{\text{н}}) dF \right]_x$ - дополнительное сопротивление входного устройства (сопротивление по жидкой линии тока);

$\left[\int_{F_{\text{1-с}}} (p - p_{\text{н}}) dF \right]_x$ - сопротивление сил давления, действующих на гондолу силовой установки;

$X_{\text{тр}}$ – сопротивление трения, действующее на внешнюю поверхность гондолы.

При $p = p_{\text{н}}$ и $X_{\text{тр}} = 0$ (идеальное обтекание) приходим к формуле тяги.

СОПЛО ЛАВАЛЯ (ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СОПЛО)

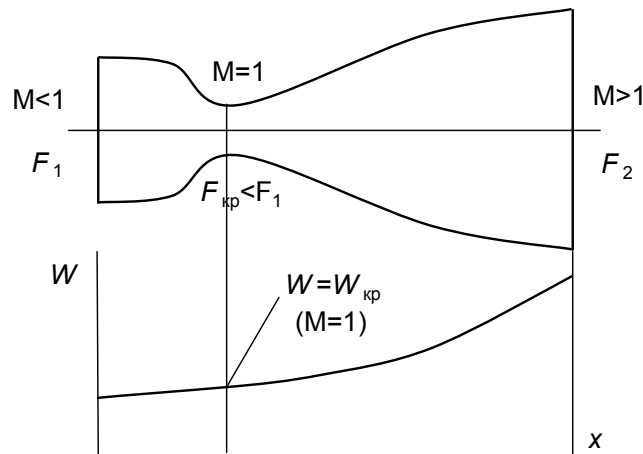
Выясним, какую геометрию должен иметь канал, в котором скорость газа непрерывно увеличивается от дозвуковой до сверхзвуковой.

Запишем уравнение обращения воздействий для случая геометрического воздействия

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = \frac{dF}{F}$$

$M < 1$	-	+	-	$dF < 0$
$M = 1$	0	+	0	$dF = 0$
$M > 1$	+	+	+	$dF > 0$

При $M < 1$ в левой части уравнения скобка $(M^2 - 1) < 0$ и $\frac{dW}{W} > 0$. Значит для того, чтобы левая и правая части уравнения имели одинаковые знаки, должно выполняться условие $\frac{dF}{F} < 0$.



В соответствии с уравнением обращения воздействий ускорение дозвукового газового потока в сужающемся сопле возможно только до скорости звука. Для того, чтобы разогнать поток до большей скорости, необходимо изменить знак воздействия – в данном случае дальнейшее ускорение газа будет происходить в расширяющемся канале. Канал переменной площади (сначала сужающийся, а затем расширяющийся), служащий для непрерывного увеличения скорости газа, называется соплом Лавала. Сечение этого сопла, в котором скорость газа равна скорости звука ($M = 1$), называется критическим. При одномерном течении идеального газа в сопле Лавала критическое сечение совпадает с минимальным сечением сопла.

Изменение параметров идеального газа по длине сопла

В соответствии с уравнением обращения воздействий скорость W по длине сопла растет.

Будем считать, что течение в сопле является энергетически изолированным ($dq_n = 0$ и $dl_{\text{тех}} = 0$) и изоэнтропийным ($dS_{\text{тр}} = 0$). При этих условиях из уравнения энергии и уравнения изменения энтропии

$$dq_H - dl_{\text{тех}} = di^* = c_p dT^*$$

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\left(\frac{s_2 - s_1}{R} + \frac{k}{k-1} \ln \frac{T_1^*}{T_2^*}\right)}$$

$T^* = \text{const}$ и $p^* = \text{const}$ по длине сопла.

Так как $a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$ и $\rho^* = \frac{p^*}{RT^*}$, то $a_{\text{кр}} = \text{const}$ и $\rho^* = \text{const}$.

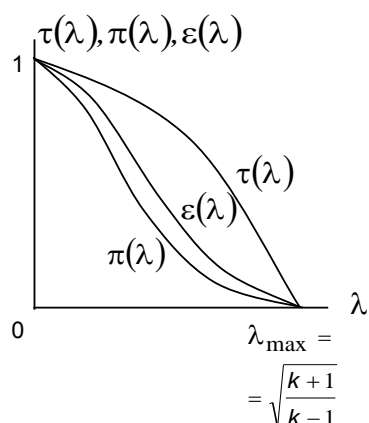
Для энергетически изолированного ($T^* = \text{const}$) и изоэнтروпийного процесса ($p^* = \text{const}$, $\rho^* = \text{const}$) в сопле

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)} \rightarrow T_2 = T_1 \frac{\tau(\lambda_2)}{\tau(\lambda_1)}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)} \rightarrow p_2 = p_1 \frac{\pi(\lambda_2)}{\pi(\lambda_1)}$$

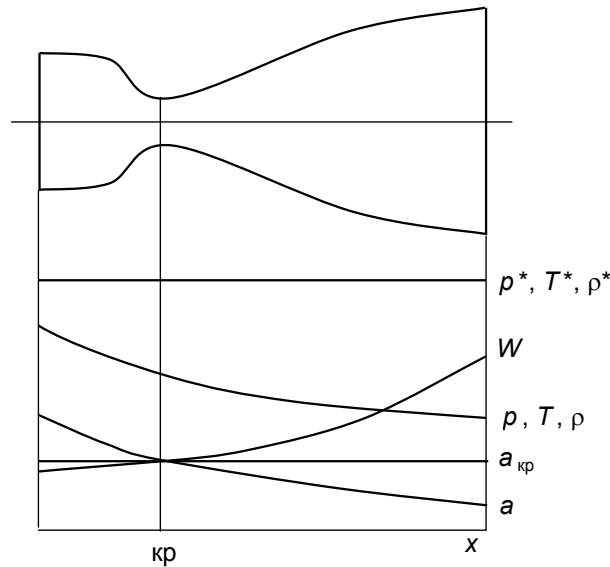
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_1)} \rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\varepsilon(\lambda_2)}{\varepsilon(\lambda_1)}$$

Для того чтобы провести анализ изменения параметров газа по длине сопла с использованием полученных формул, необходимо знать, как газодинамические функции τ , π и ε зависят от приведенной скорости. Зависимости $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$ и $\varepsilon(\lambda)$ имеют вид:



По длине сопла λ растет ($\lambda = W/a_{\text{кр}}$, $W \uparrow$, $a_{\text{кр}} = \text{const}$), а газодинамические функции τ , π и ε - уменьшаются. Следовательно, $T_2 < T_1$, $p_2 < p_1$ и $\rho_2 < \rho_1$. Скорость звука по длине сопла уменьшается, т.к. $a = \sqrt{kRT} \downarrow$.

Изменение параметров газа по длине сопла Лаваля изображено на рисунке.



Течение газа в сужающемся сопле

Рассмотрим энергетически изолированное течение ($T^* = \text{const}$) идеального газа ($p^* = \text{const}$) в сужающемся сопле, на входе в которое газ имеет дозвуковую скорость. Обозначим параметры газа перед соплом индексом т, а на срезе сопла – индексом с. При течении в сопле идеального (невязкого) газа $p_c^* = p_t^*$.

В соответствии с уравнением обращения воздействий дозвуковой поток в сужающемся канале должен ускоряться. Изменение площади канала при этом является необходимым, но не достаточным условием изменения скорости газа. Достаточным условием ускорения газа в сопле является наличие разности давлений перед соплом и на его срезе, т.е. разгон газа осуществляется за счет уменьшения его давления (это следует из уравнения количества движения $-dp/\rho = WdW$).

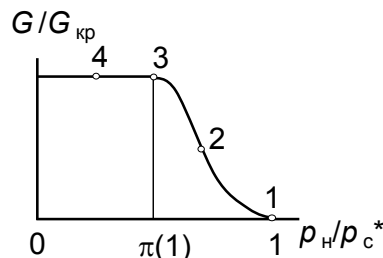
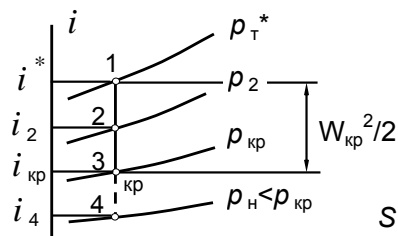
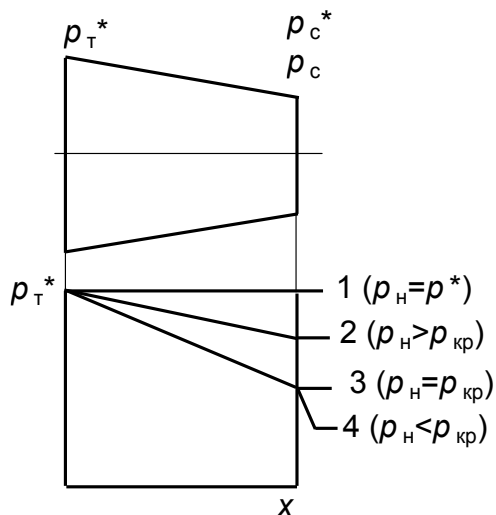
Скорость истечения газа из сопла может быть найдена по газодинамической функции $\pi(\lambda_c)$

$$\pi(\lambda_c) = \frac{P_c}{P_c^*} = \frac{P_c}{P_t^*},$$

для чего необходимо знать p_c .

Давление газа на срезе сужающегося сопла может быть равно, а может и отличаться от давления окружающей среды. Это зависит от соотношения между располагаемым отношением давлений $\frac{P_H}{P_c^*}$ и критическим отношением давлений $\frac{P_{кр}^*}{P_c} = \pi(\lambda_c = 1)$, обеспечивающим истечение газа из сопла со скоростью звука.

Возможны четыре режима работы сужающегося сопла.



$$1. \frac{p_H}{p_c} = 1.$$

Перепада давления нет и давление по всему тракту сопла постоянно: $p_H = p_c = p_T^* = p_c^*$.

$$\pi(\lambda_c) = \frac{p_c}{p_T^*} = \frac{p_H}{p_T^*} = 1 \text{ и } \lambda_c = 0.$$

Истечение газа из сопла отсутствует.

$$2. \frac{p_{kp}}{p_c} = \pi(1) < \frac{p_H}{p_c} < 1.$$

Располагаемое отношение давлений больше критического и может обеспечить только дозвуковую скорость истечения: $W_c < a$ ($\lambda_c < 1$). При этом давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды $p_c = p_H$, так как при увеличении или уменьшении давления окружающей среды волны сжатия или разрежения будут распространяться вверх по течению со скоростью звука большей скорости истечения, проникнут в сопло и изменят режим его работы таким образом, что автоматически будет выполняться условие $p_c = p_H$.

На этом режиме работы сужающегося сопла скорость истечения λ_c определяется по газодинамической функции

$$\pi(\lambda_c) = \frac{p_c}{p_T^*} = \frac{p_H}{p_T^*}.$$

$$3. \frac{p_H}{p_c} = \frac{p_{kp}}{p_c} = \pi(1).$$

На этом режиме газ истекает из сопла со скоростью звука, а давление на его срезе равно давлению окружающей среды:

$$\lambda_c = 1$$

$$p_c = p_n.$$

$$4. \frac{p_n}{p_c} < \frac{p_{кр}}{p_c} = \pi(1).$$

В этом случае располагаемое отношение давлений достаточно для обеспечения сверхзвуковой скорости истечения газа из сопла, но в соответствии с уравнением обращения воздействий в сужающемся сопле газ можно разогнать только до скорости звука. Поэтому на рассматриваемом режиме работы сопла $\lambda_c = 1$. При этом давление на срезе сопла будет равно

$$p_c = p_c^* \pi(1) = p_{кр} > p_n.$$

Это давление больше давления окружающей среды, так как информация об изменении давления окружающей среды не может передаваться вверх по потоку, имеющему звуковую скорость. Сопло оказывается изолированным от внешней среды и изменение давления окружающей среды не оказывает влияния на течение в сопле. Это явление называется запирианием сопла и кризисом геометрического воздействия.

При наличии в сопле потерь полного давления, обусловленных трением и неравномерностью полей параметров в его сечениях, давление торможения на срезе сопла p_c^* будет меньше давления торможения перед соплом p_T^* , а действительная скорость истечения λ_c меньше скорости истечения из сопла без потерь $\lambda_{с.ад}$. Потери задаются либо коэффициентом потерь полного давления $\sigma = p_c^*/p_T^*$, либо коэффициентом скорости $\varphi = \lambda_c/\lambda_{с.ад}$, между которыми существует однозначная связь

$$\sigma = \frac{\pi(\lambda_{с.ад})}{\pi(\lambda_{с.ад} \cdot \varphi)}.$$

Расчет сопла Лавалья на расчетном режиме работы

Расчетным называется режим сверхзвукового истечения газа $\lambda_c > 1$ при $p_c = p_n$.

В энергетически изолированном сопле при наличии потерь

$$T_c^* = T_T^*; \quad p_c^* = p_T^* \cdot \sigma_c; \quad \rho_c^* = p_c^*/R \cdot T_c^*$$

σ_c – коэффициент потерь полного давления в сопле.

Скорость на срезе расчетного сопла Лавалья определяется по $\pi(\lambda_c)$:

$$\pi(\lambda_c) = \frac{p_c}{p_c^*} = \frac{p_n}{p_c} = \frac{p_n}{p_T^* \sigma_c},$$

Параметры газа на срезе сопла рассчитываются по формулам:

$$p_c = p_c^* \pi(\lambda_c)$$

$$T_c = T_c^* \tau(\lambda_c)$$

$$\rho_c = \rho_c^* \varepsilon(\lambda_c)$$

$$W_c = \lambda_c a_{кр}$$

Расход газа обычно определяется по параметрам в критическом сечении сопла, в котором $\lambda_c = 1$ и $q(\lambda_c) = 1$:

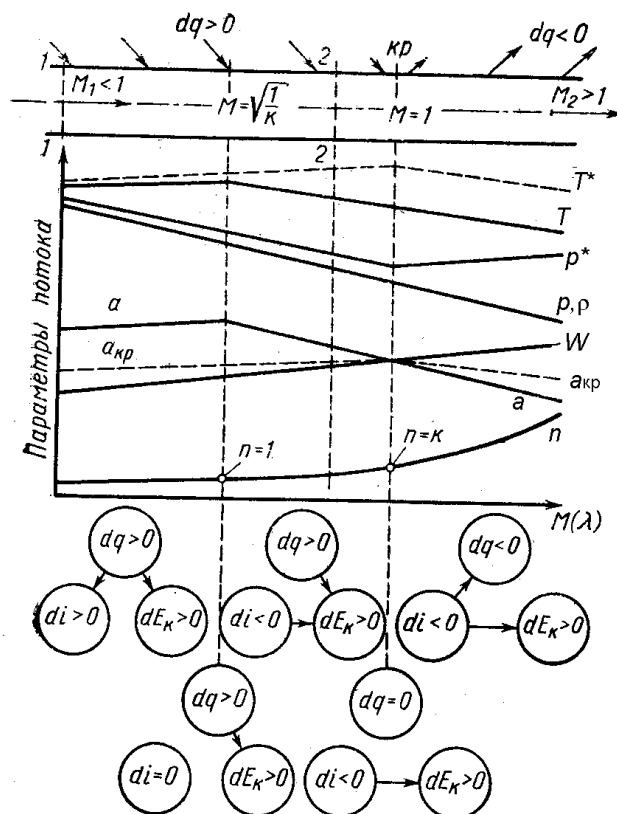
$$G = m \frac{p_{кр}^* F_{кр}}{\sqrt{T_{кр}^*}} = m \frac{p_{кр}^* F_{кр}}{\sqrt{T_T^*}}$$

При расчете реальных сопел в первом приближении можно принять $p_{кр}^* = p_T^*$.

ТЕПЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ (ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В ТРУБЕ С ТЕПЛОБМЕНОМ)

Подвод тепла к движущемуся газу осуществляется в камерах сгорания тепловых двигателей. Рассмотрим течение газа с теплообменом на примере течения идеального газа в трубе, через стенки которой возможен подвод или отвод тепла от газа.

Пусть имеется канал постоянного сечения, через стенки которого подводится или отводится тепло. Выявим условия, при которых газ может непрерывно увеличивать скорость от $M < 1$ до $M > 1$, и проанализируем изменение параметров газа в этом течении.



В соответствии с уравнением обращения воздействий дозвуковой поток можно разогнать до скорости звука, подводя к газу тепло. Дальнейшее ускорение газа возможно при отводе тепла от газа:

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = -\frac{k-1}{a^2} dq_n$$

$M < 1$	-	+	-	+	$dq_n > 0$
$M = 1$	0	+	-	0	$dq_n = 0$
$M > 1$	+	+	-	-	$dq_n < 0$

Канал, в котором происходит непрерывное увеличение скорости газа за счет теплового воздействия, называется тепловым соплом. Сечение канала, в котором $W = a$ ($M=1$) называется критическим.

В связи с тем, что в тепловом сопле $dq_n \neq 0$ и $dS_{обр} = dq_n/T \neq 0$, то процесс в таком сопле не будет изоэнтропийным. Он будет описываться показателем политропы, переменным по длине сопла.

Разделив уравнение Бернулли

$$\frac{dp}{\rho} = -WdW$$

на уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dW}{W}$$

получим

$$\frac{dp}{d\rho} = W^2.$$

Но из термодинамики известно, что

$$\frac{dp}{d\rho} = n \frac{p}{\rho} = \frac{npk}{\rho k} = \frac{a^2 n}{k}.$$

Из двух последних выражений следует, что

$$n = k \cdot M^2.$$

В соответствии с уравнением энергии при подводе тепла температура торможения газа увеличивается, а при отводе – уменьшается. Следовательно, максимальное значение T^* будет соответствовать критическому сечению. Максимальное значение статической температуры будет в сечении канала, в котором $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$. Это объясняется следующим. В области $0 <$

$M < \sqrt{\frac{1}{k}}$ ($0 < n < 1$) подводимое тепло затрачивается на увеличение энтальпии (T) и

кинетической энергии газа $E_k = W^2/2$. В сечении, где $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$ ($n=1$) процесс изотермичен.

Температура достигает максимума и все подводимое тепло идет на увеличение кинетической энергии.

В области $\sqrt{\frac{1}{k}} < M < 1$ ($1 < n < k$) кинетическая энергия увеличивается как за счет подводимого тепла, так и за счет уменьшения энтальпии (T). Это объясняется интенсивным расширением газа за счет увеличения сжимаемости с ростом числа M . В критическом сечении $M = 1$ ($n = k$) теплообмен с внешней средой отсутствует и ускорение газа осуществляется только за счет уменьшения энтальпии.

В области $M > 1$ ($n > k$) увеличение кинетической энергии и отвод тепла происходит за счет уменьшения энтальпии, вызванного интенсивным расширением газа.

Расчет параметров газового потока в произвольном сечении 2-2 при тепловом воздействии одного знака

Температура торможения определяется из уравнения энергии

$$T_2^* = T_1^* + \frac{q_{н1-2}}{c_p}$$

Для расчета λ_2 и изменения всех остальных параметров используется уравнение количества движения в полных импульсах для случая $P = 0$, т.е. $\Phi_2 = \Phi_1$. Подставляя в это уравнение выражения для Φ через газодинамические функции $z(\lambda)$, $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$ и учитывая, что $a_{кр 2}/a_{кр 1} = \sqrt{T_2^*/T_1^*}$, получим следующие формулы для расчета:

- подогрева

$$\Theta = \frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{[z(\lambda_1)]^2}{[z(\lambda_2)]^2}$$

- относительного количества тепла

$$\bar{q} = \frac{q_{н1-2}}{i_1^*} = \frac{i_2^* - i_1^*}{i_1^*} = \frac{T_2^*}{T_1^*} - 1 = \frac{[z(\lambda_1)]^2}{[z(\lambda_2)]^2} - 1$$

- коэффициента потерь полного давления

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}$$

- отношения статических давлений

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{r(\lambda_2)}{r(\lambda_1)}$$

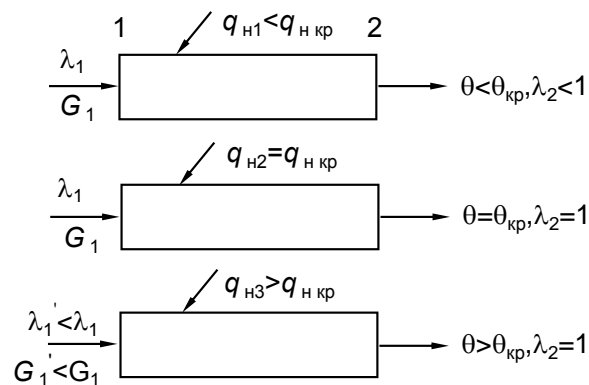
- отношения статических температур

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[z(\lambda_1)]^2 \tau(\lambda_2)}{[z(\lambda_2)]^2 \tau(\lambda_1)}$$

- отношения плотностей и скоростей

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{W_1}{W_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = \frac{z(\lambda_2) \lambda_1}{z(\lambda_1) \lambda_2}$$

Рассмотрим подвод тепла к дозвуковому потоку газа в канале постоянного сечения (трубе). Сечение 1 соответствует входному сечению канала, а сечение 2 – выходному сечению. В зависимости от соотношения количества подведенного тепла q_n и тепла $q_{n\text{кр}}$, при котором в сечении канала 2–2 (на его выходе) достигается скорость звука ($\lambda_2 = 1$), возможны три режима течения. Они изображены на рисунке.



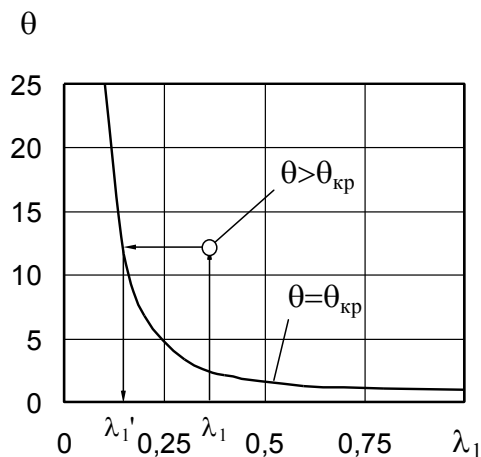
При $\theta < \theta_{\text{кр}}$ течение по всей длине канала дозвуковое и $\lambda_2 < 1$. При некотором значении

подогрева газа $\theta_{\text{кр}} = \frac{T_{2\text{кр}}^*}{T_1^*} = \frac{[z(\lambda_1)]^2}{4}$ в сечении канала 2–2 скорость становится равной

скорости звука ($\lambda_2 = 1$). Если продолжать подогревать газ дальше, то скорость в этом сечении меняться не будет, а расход уменьшится (скорость и площадь сечения канала постоянны, а плотность газа уменьшается за счет подогрева газа). Это явление называется тепловым кризисом. Для того чтобы предотвратить тепловой кризис, необходимо либо устранить

воздействие, либо изменить его знак на противоположный. Уменьшение расхода газа при подогреве, превышающем критический, приведет к уменьшению скорости газа в начальном сечении трубы. И чем больше этот подогрев, тем меньше скорость на входе в трубу.

Зависимость $\theta_{кр} = \frac{T_{2кр}^*}{T_1} = f(\lambda_1)$ для $\lambda_1 < 1$ приведена на рисунке.



Кривая $\theta = \theta_{кр}$ соответствует кризису течения, при котором $\lambda_2=1$. Под кривой расположена область подогревов $\theta < \theta_{кр}$, соответствующих $\lambda_2 < 1$, а над кривой – область неосуществимых при данных λ_1 подогревов. При этих подогревах $\theta > \theta_{кр}$ на срезе трубы сохраняется кризис $\lambda_2 = 1$, а расход газа G и приведенная скорость λ_1 автоматически снижаются до значений G' и λ_1' , для которых данный подогрев будет критическим.

Подвод тепла к движущемуся газу (даже идеальному) приводит к уменьшению его полного давления. Это явление называется тепловым сопротивлением. Тепловое сопротивление объясняется тем, что при подводе тепла к движущемуся газу энтропия возрастает в большей степени, чем при подводе того же количества тепла к неподвижному газу вследствие различия в T и T^* :

$$\Delta S_{неподв} = \int_1^2 \frac{dq_H}{T^*} < \Delta S_{движ} = \int_1^2 \frac{dq_H}{T} \quad (T < T^*)$$

Изменение полного давления в необратимом процессе однозначно связано с изменением энтропии – увеличение энтропии приводит к уменьшению полного давления.

КОМПРЕССОР И ТУРБИНА

Удельная работа идеального компрессора или турбины

Компрессор или турбина, в которых работа трения и изменение потенциальной энергии положения отсутствуют, а изменение давления идет по изоэнтропийному закону, называются идеальными. Из уравнения Бернулли

$$l_{\text{ид}} = - \left\{ \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \right\}$$

В случае изоэнтропийного торможения газа

$$\frac{W^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \left[\left(\frac{p^*}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

$$l_{\text{ид}} = - \left\{ \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{k}{k-1} \frac{p_2}{\rho_2} \left[\left(\frac{p_2^*}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] - \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_1^*}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \right\} =$$

$$= - \frac{k}{k-1} \left\{ \frac{p_2^{\frac{k-1}{k}}}{\rho_1} p_1^{\frac{1}{k}} - \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_2^{\frac{1}{k}}}{\rho_2} p_2^{*\frac{k-1}{k}} - \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1^{\frac{1}{k}}}{\rho_1} p_1^{*\frac{k-1}{k}} + \frac{p_1}{\rho_1} \right\}$$

В изоэнтропийном процессе

$$\frac{p_2^{1/k}}{\rho_2} = \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1} = \frac{p_1^{*/k}}{\rho_1^*} = \frac{p_2^{*/k}}{\rho_2^*}$$

Следовательно

$$l_{\text{ид}} = - \frac{k}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2^*}{\rho_2^*} - \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1^*}{\rho_1^*} \right) = - \frac{k}{k-1} \frac{p_1^*}{\rho_1^*} \left[\left(\frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Удельная работа компрессора

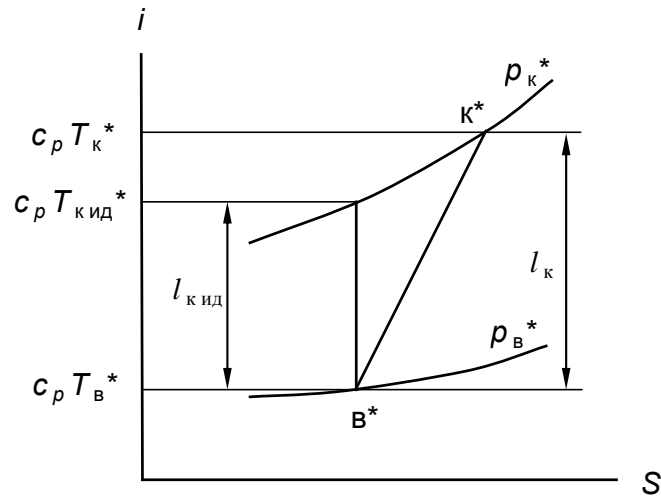
Из уравнения состояния $p_1^*/\rho_1^* = RT_1^*$.

В теории ВРД параметры газа перед компрессором обозначаются индексом **в**, а за компрессором – индексом **к**. Кроме этого вводится величина $\pi_k^* = p_k^*/p_v^*$, называемая степенью повышения давления в компрессоре, и к.п.д. компрессора $\eta_k = l_{\text{к ид}} / l_{\text{к}}$ ($l_{\text{к ид}}$ и $l_{\text{к}}$ – удельные работы идеального и реального компрессоров).

С учетом этого

$$l_k = -\frac{k}{k-1} RT_B^* \left(\pi_k^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right) / \eta_k.$$

В i - S координатах процесс сжатия газа в идеальном и реальном компрессорах изображается следующим образом



Используя уравнение энергии в тепловой форме

$$q_H - l_k = c_p (T_K^* - T_B^*)$$

для случая $q_H = 0$, можно получить второе выражение для удельной работы реального компрессора

$$l_k = -c_p (T_K^* - T_B^*) = -\frac{kR}{k-1} (T_K^* - T_B^*).$$

К.п.д. компрессора можно записать следующим образом

$$\eta_k = \frac{l_{Kид}}{l_k} = \frac{T_{Kид}^* - T_B^*}{T_K^* - T_B^*}.$$

Мощность компрессора

$$N_k = G_B l_k.$$

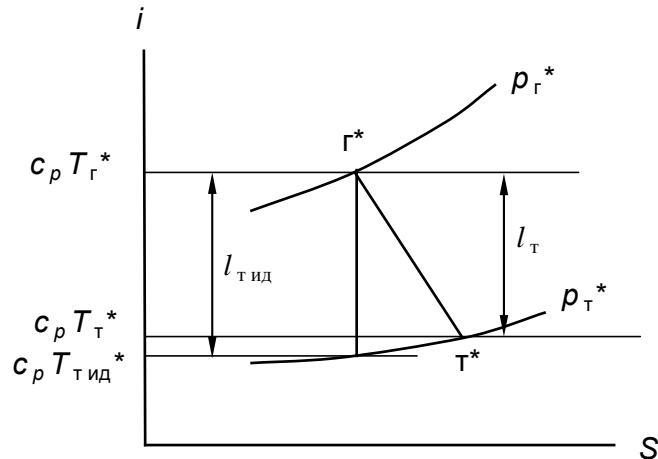
Удельная работа турбины

В теории ВРД параметры газа перед турбиной обозначаются индексом $г$, а за турбиной – индексом $т$. Вводится величина $\pi_t^* = p_t^*/p_г^*$, называемая степенью понижения давления на турбине, и к.п.д. турбины $\eta_t = l_t / l_{тид}$ ($l_{тид}$ и l_t – удельные работы идеальной и реальной турбин).

С учетом этого

$$l_T = \frac{k}{k-1} RT_{\Gamma}^* \left(1 - \frac{1}{\pi_T^* \frac{k-1}{k}} \right) \eta_T$$

В i - S координатах процесс расширения газа в идеальной и реальной турбинах изображается следующим образом



Из уравнения энергии в тепловой форме для случая $q_H = 0$ можно получить еще одно выражение для удельной работы реальной турбины

$$l_T = c_p (T_{\Gamma}^* - T_{T^*}) = \frac{kR}{k-1} (T_{\Gamma}^* - T_{T^*}).$$

К.п.д. турбины можно записать следующим образом

$$\eta_T = \frac{l_T}{l_{Tид}} = \frac{T_{\Gamma}^* - T_{T^*}}{T_{\Gamma}^* - T_{Tид}^*}.$$

Мощность турбины

$$N_T = G_T l_T.$$

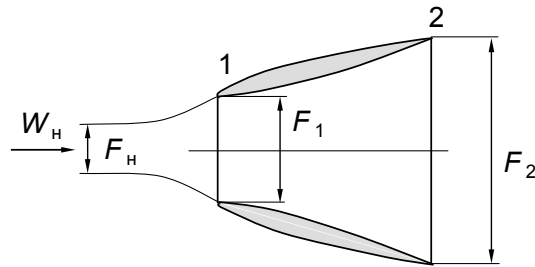
ВХОДНЫЕ УСТРОЙСТВА (ДИФФУЗОРЫ) ВОЗДУШНО-РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ (ВРД)

В двигателях диффузоры предназначены для повышения статического давления газа за счет уменьшения его кинетической энергии в процессе торможения. При этом кинетическая энергия газа превращается в энергию давления и частично затрачивается на преодоление сопротивления диффузора.

Диффузоры ВРД по числу Маха полета M_H подразделяются на дозвуковые $M_H < 1$, малых сверхзвуковых скоростей или трансзвуковые $M_H < 1,5$ и сверхзвуковые $M_H > 1,5$.

Дозвуковые диффузоры ВРД

Дозвуковые диффузоры представляют собой расширяющиеся каналы с плавно очерченными входными кромками для предотвращения отрыва потока на входе.



Будем считать, что течение воздуха в диффузоре является энергетически изолированным. Температура торможения воздуха при энергетически изолированном течении ($q_{н\ 1-2} = 0, l_{тех\ 1-2} = 0$) в соответствии с уравнением энергии в тепловой форме

$$q_{н\ 1-2} - l_{тех\ 1-2} = c_p(T_2^* - T_1^*)$$

остаётся постоянной: $T_2^* = T_1^* = T_H^*$.

Полное давление из-за гидравлических потерь в соответствии с уравнением процесса

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\frac{s_2 - s_1}{R}}$$

уменьшается, что приводит к уменьшению тяги и экономичности двигателя.

Согласно уравнению обращения воздействий

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = \frac{dF}{F}$$

скорость воздуха в дозвуковых диффузорах уменьшается, а уменьшение скорости, как это следует из уравнения количества движения

$$-\frac{dp}{\rho} = WdW$$

приводит к увеличению давления газа.

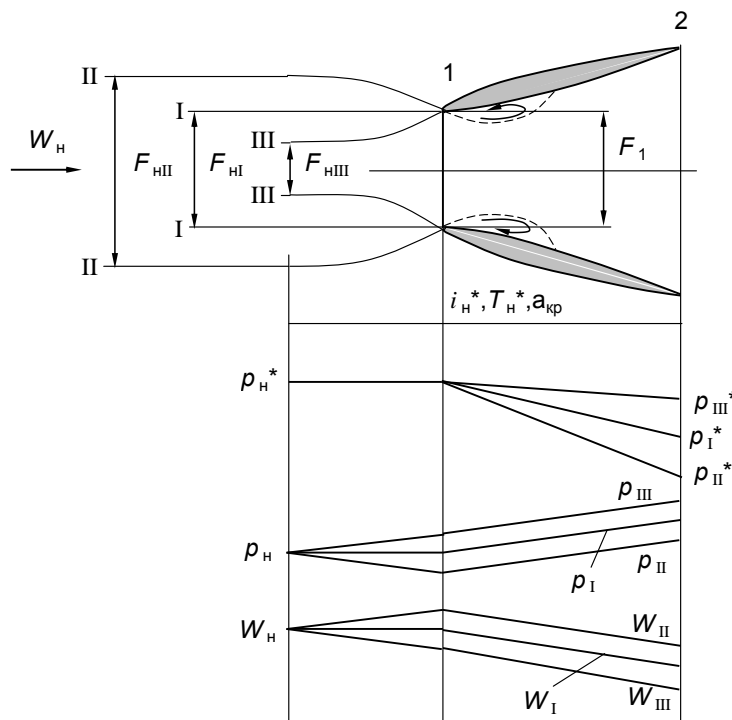
Пропускная способность любого диффузора оценивается коэффициентом расхода

$$\psi = \frac{G_d}{G_p} = \frac{\rho_H W_H F_H}{\rho_H W_H F_1} = \frac{F_H}{F_1},$$

где F_H — площадь поперечного сечения невозмущенной струи газа, попадающей в диффузор; F_1 — площадь входного отверстия диффузора; G_d — действительный расход газа через диффузор; G_p — расчетный расход, т. е. расход газа с параметрами невозмущенного потока через входное сечение диффузора.

Режимы работы дозвукового диффузора

Пусть самолет летит с постоянной скоростью W_n на постоянной высоте H . Тогда, изменяя давление p_2 , например за счет изменения частоты вращения компрессора, можно получить три различных режима работы диффузора. Эти режимы изображены на рисунке.



I. Режим без преобразования скорости и давления воздуха до диффузора, при котором $W_1 = W_n$ и $p_1 = p_n$. В этом случае струя воздуха попадает в диффузор без изменения сечения $F_n = F_1$. Коэффициент расхода $\psi = 1$.

II. Режим с внешним расширением потока $W_1 > W_n$, $p_1 < p_n$, $\rho_1 < \rho_n$ и $\psi = F_{нII}/F_1 > 1$. Этот режим возникает при снижении давления p_2 за счет увеличения частоты вращения компрессора. Режим II не желателен, так как сопровождается повышенными потерями полного давления $\sigma_{II} < \sigma_I$ за счет увеличения λ_1 и λ_2 , а также возникновения отрыва пограничного слоя на внутренней поверхности диффузора из-за увеличения угла притекания струй к передней кромке диффузора.

III. Режим с внешним сжатием газа $W_1 < W_n$, $p_1 > p_n$, $\rho_1 > \rho_n$, $p_1^* = p_n^*$ и $\psi = F_{нIII}/F_1 > 1$. Этот режим получается при увеличении p_2 .

Как показывают опыты, оптимальным режимом работы дозвукового входного устройства с точки зрения потерь является режим, при котором $W_1 \cong 0,5W_n$. При этом перед диффузором происходит изоэнтропное торможение газа, в котором реализуется примерно 75% общей степени повышения давления в диффузоре $\pi_d = p_2/p_n$. Повышение сжатия перед диффузором по сравнению с оптимальным режимом, сопровождающееся уменьшением $F_{нIII}$ и

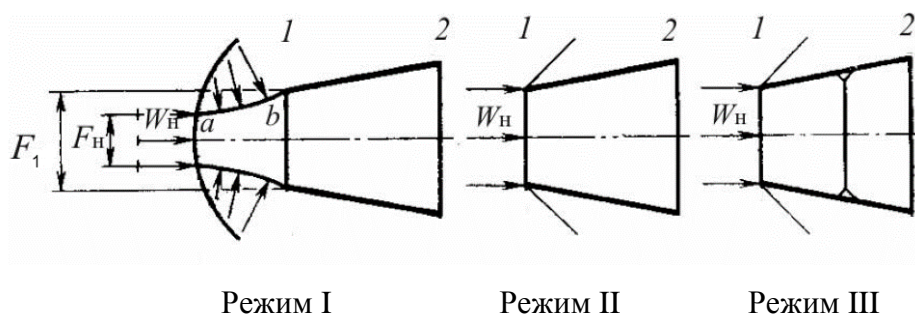
увеличением углов притекания воздуха к передней кромке диффузора, приводит к увеличению лобового сопротивления за счет отрыва потока на его внешней поверхности.

Гидравлические потери в дозвуковых диффузорах

Входные устройства должны иметь минимальные гидравлические потери. Гидравлические потери в диффузоре складываются из потерь на трение и потерь на образование и поддержание вихрей, вызванных отрывом пограничного слоя. Минимальными гидравлическими потерями обладают конические диффузоры, имеющие угол раскрытия $\alpha = 8^\circ \div 12^\circ$. При этих углах отсутствует отрыв пограничного слоя внутри диффузора и относительно малы потери на трение. Для уменьшения длины диффузора его стенки выполняются криволинейными так, чтобы градиент давления по длине диффузора был бы постоянным $dp/dx = \text{const}$. Течение в таком диффузоре обладает большой устойчивостью, пограничный слой нарастает медленнее и снижение потерь может достигать 40%.

Трансзвуковые диффузоры

При $M_n < 1,5$ используются обычные расширяющиеся диффузоры с острыми входными кромками. Возможны следующие режимы работы таких диффузоров.



I. На первом режиме коэффициент расхода $\psi < 1$. Перед диффузором возникает отошедшая ударная волна. Струя воздуха сечением $F_n < F_1$, попадающая в диффузор, пересекает участок скачка близкого к прямому и тормозится до дозвуковой скорости. Далее дозвуковой поток изоэнтропно тормозится на участке между ударной волной и входным сечением диффузора до скорости λ_1 и затем – до λ_2 в канале диффузора. При этом на поверхность $a-b$ струи между скачком и сечением $1-1$ действует повышенное давление, вызванное центробежными силами частиц воздуха, движущихся по криволинейным траекториям. Проекция на направление скорости невозмущенного потока результирующей силы избыточного давления (разности давлений за ударной волной и давлением невозмущенного потока), действующего на поверхность $a-b$ струи, называется дополнительным сопротивлением диффузора.

II. При уменьшении давления за диффузором p_2 отошедшая ударная волна будет приближаться к входному сечению диффузора и при некотором значении давления скачок уплотнения расположится в этом сечении. Так как $F_n = F_1$, то коэффициент расхода $\psi = 1$. Внешний поток тормозится на косых скачках уплотнения, что соответствует минимальному внешнему сопротивлению диффузора. На этом режиме потери в диффузоре больше, чем при первом режиме за счет увеличения λ_1 и λ_2 вследствие отсутствия изоэнтропного сжатия перед входом в диффузор.

III. При дальнейшем уменьшении давления p_2 сверхзвуковая струя воздуха сечением $F_n = F_1$ входит в диффузор, ускоряется в расширяющемся канале и ударно тормозится в более интенсивном скачке уплотнения внутри диффузора. Поэтому потери полного давления на этом режиме больше, чем на режиме II: $\sigma_3 < \sigma_2$. При этом $\psi = 1$ и $W_1 = W_n$.

Таким образом, режим $\psi > 1$ в сверхзвуковом полете не реализуется.

Коэффициент сохранения полного давления рассмотренного входного устройства ВРД определяется по формуле

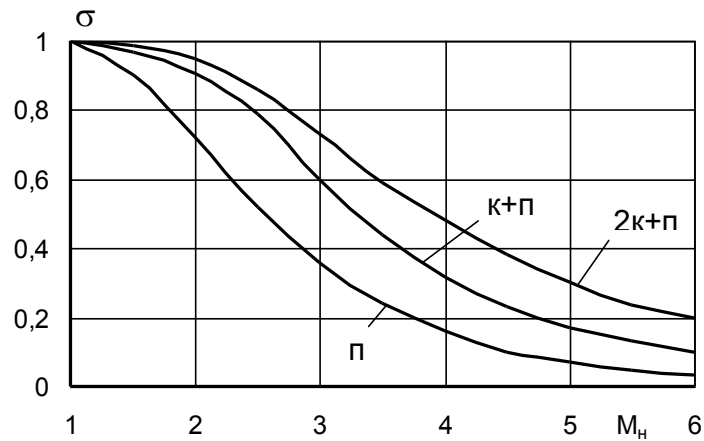
$$\sigma_d = p_2^* / p_n^* = p_1^* / p_n^* \cdot p_2^* / p_1^* = \sigma_{п.с} \cdot \sigma_{к.д}$$

где $\sigma_{п.с}$, $\sigma_{к.д}$ — коэффициенты потерь полного давления в прямом скачке уплотнения и в канале диффузора. Потери полного давления на прямом скачке уплотнения при $M_n = 1,5$ не велики: $\sigma_{п.с} > 0,93$. Это позволяет применять этот простейший односкачковый диффузор при умеренных сверхзвуковых скоростях полета.

Сверхзвуковые диффузоры

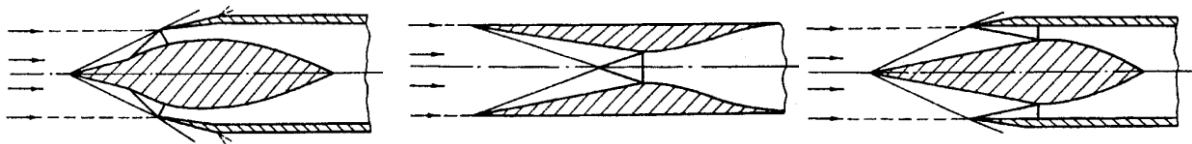
При числе Маха полета $M_n > 1,5$ потери полного давления на прямом скачке уплотнения резко возрастают с увеличением M_n .

Исследования показали, что потери полного давления в сверхзвуковом диффузоре снижаются при замене сильного прямого скачка уплотнения системой более слабых косых скачков, за которыми скорость остается сверхзвуковой, с замыкающим слабым прямым скачком, переводящим поток в дозвуковой. Последовательный ряд косых скачков возникает у поверхностей торможения сверхзвукового диффузора, которые располагаются под углами α_i к сверхзвуковому потоку. Зависимости коэффициента потерь полного давления от M_n для одного прямого скачка и систем из двух и трех скачков приведены на рисунке.



При заданном числе Маха полета M_n чем больше количество скачков, тем меньше потери полного давления.

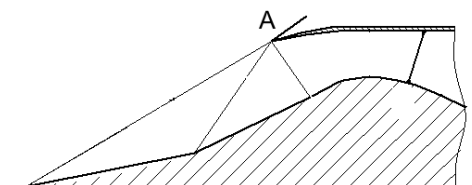
Классификация сверхзвуковых входных устройств



В зависимости от расположения скачков уплотнения относительно плоскости входа различают *три типа сверхзвуковых диффузоров*:

- внешнего сжатия — косые скачки уплотнения располагаются перед плоскостью входа;
- внутреннего сжатия — скачки уплотнения находятся внутри канала;
- смешанного сжатия — часть скачков уплотнения располагается вне и часть — внутри канала.

Далее будем рассматривать только входные устройства внешнего сжатия.



Для того чтобы получить максимально возможную тягу двигателя, необходимо, в частности, иметь диффузор с минимальными потерями полного давления. Это достигается в случае оптимальной системы скачков. *Оптимальной системой* данного числа скачков для заданного числа Маха полета M_n называется система, обеспечивающая максимальное значение коэффициента сохранения полного давления σ_d . В диффузоре внешнего сжатия с оптимальной

системой скачков все скачки сходятся на передней кромке обечайки (в точке A). В этом случае обеспечивается максимальное значение σ_d , $\psi = 1$ и минимальное внешнее сопротивление.

Для системы скачков, состоящей из m скачков уплотнения, т.е. из $(m - 1)$ косых и одного замыкающего прямого скачка

$$\sigma_d = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \dots \sigma_{(m-1)} \cdot \sigma_p.$$

Исследования показали, что в случае оптимальной системы плоских скачков уплотнения все скачки имеют одинаковую интенсивность

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{(m-1)} = \sigma_k.$$

Поэтому

$$\sigma_{d \max} = \sigma_k^{(m-1)} \cdot \sigma_p.$$

Равенство σ_i для всех косых скачков оптимальной системы означает, что для этих скачков одинаковы M_{in} , λ_{in} , повышение давления p_i/p_{i-1} , температуры T_i/T_{i-1} и плотности ρ_i/ρ_{i-1} .

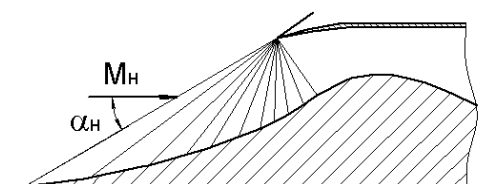
Замыкающий прямой скачок оптимальной системы при $1,5 < M_n < 5$ немного слабее косых скачков:

$$M_{m-1} = 0,94 M_{nn}.$$

Расчет оптимальной системы скачков может быть проведен с использованием графиков, приведенных в учебниках.

Количество скачков системы выбирается исходя из скорости полета. Если M_n лежит в диапазоне $1,8 \div 2,0$, то используется двухскачковая система, если в диапазоне $2 \div 2,5$ – трехскачковая и так далее.

"Изоэнтропный" диффузор.



При увеличении числа скачков уплотнения оптимальной системы диффузора уменьшаются потери полного давления в нем и, следовательно, увеличивается коэффициент сохранения полного давления диффузора. Теоретически в предельном случае, при стремлении

количества скачков системы к бесконечности, скачки превратятся в характеристики сжатия. Течение газа, пересекающего характеристики, является изоэнтروпийным (энтропия не меняется). В таком течении давление торможения постоянно и $\sigma = 1$ (потери полного давления отсутствуют).

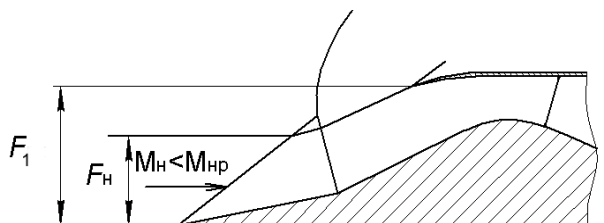
В действительности полностью изоэнтропийное торможение сверхзвукового потока осуществить не удастся: течение происходит при большом градиенте давления $dp/dx > 0$, что приводит к отрыву пограничного слоя, возникновению скачка уплотнения, переходящего в отошедшую ударную волну у обечайки.

Нерасчетные режимы работы сверхзвукового диффузора внешнего сжатия

Оптимальная компоновка входного устройства соответствует только расчетным числу $M_{нр}$ и режиму работы двигателя. При отклонении M_n от $M_{нр}$ и изменениях режима работы двигателя компоновка теряет оптимальность.

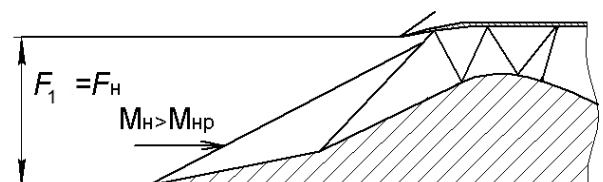
В зависимости от соотношения M_n и $M_{нр}$ возможны два режима работы сверхзвуковых диффузоров внешнего сжатия.

1. Режим $M_n < M_{нр}$.



На этом режиме углы косых скачков увеличиваются и они отходят от кромки обечайки, превращаясь в отошедшую (выбитую) ударную волну. Это приводит к увеличению потерь, т. е. к уменьшению σ_d и уменьшению расхода воздуха $\psi < 1$. Кроме этого, взаимодействие ударной волны с пограничным слоем вызывает его отрыв и неустойчивую работу входного устройства (помпаж).

2. Режим $M_n > M_{нр}$.



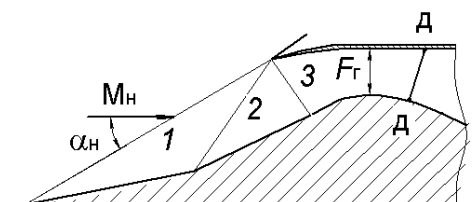
При $M_n > M_{нр}$ углы наклона косых скачков уменьшаются, и скачки попадают в канал диффузора, в котором происходит их взаимодействие со стенками диффузора (отражение от поверхностей канала диффузора). В результате этого количество скачков возрастает, что

приводит к увеличению потерь и уменьшению σ_d . Коэффициент расхода на этом режиме такой же как и на расчетном, т.е. $\psi = 1$.

Таким образом, при увеличении и уменьшении M_n по сравнению с расчетным значением M_{nr} σ диффузора уменьшается. Максимальное значение σ_d соответствует M_{nr} .

Особенности течения воздуха за замыкающим систему прямым скачком.

Внутренний канал диффузора выполняется в виде канала переменного сечения: его площадь сначала уменьшается, а затем увеличивается.



Течение в этом канале аналогично течению в сопле Лавала. После торможения на замыкающем прямом скачке уплотнения 3 поток становится дозвуковым. Этот дозвуковой поток разгоняется в сужающемся канале до скорости звука ($\lambda=1$), которая реализуется в самом узком сечении канала (горле диффузора), и далее, став сверхзвуковым, продолжает разгоняться в расширяющейся части диффузора. Параметры проточной части диффузора выбираются таким образом, чтобы обеспечить возникновение прямого скачка уплотнения $D-D$ в расширяющейся части диффузора. Наличие сверхзвуковой области течения со скачком уплотнения $D-D$ обеспечивает сохранение оптимальной системы скачков и неизменный массовый расход воздуха через двигатель при изменении режима работы двигателя, сопровождающегося изменением давления за диффузором. При изменении давления за диффузором (например, при изменении температуры в камере сгорания) возникает возмущение давления Δp , распространяющееся со скоростью звука. Наличие сверхзвуковой зоны в диффузоре не позволяет распространиться этому возмущению вверх по потоку и течение левее скачка уплотнения при изменении давления за диффузором остается неизменным. В случае необходимости уменьшения давления за диффузором скачок перемещается вправо, в область большей скорости. При этом скачок становится более сильным, потери в нем увеличиваются, что сопровождается уменьшением статического давления до необходимой величины. Выравнивание давления приводит к исчезновению возмущения давления. При необходимости увеличения давления за диффузором скачок $D-D$ перемещается влево и давление за ним возрастает в соответствии с описанным механизмом.